

本文框架内容发表在:

阎坤. 数据曲线间断区域的自适应连接方程研究[J]. 地球物理学进展, 2011, 26(1):162~171.

YAN Kun. Research on adaptive connection equation in discontinuous area of data curve[J]. Progress in Geophys(in Chinese with abstract in English), 2011, 26(1): 162~171; DOI:10.3969/j.issn.1004-2903.2011.01.018.

数据曲线间断区域的自适应连接方程研究

阎坤

(西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061)

摘要: 通过讨论非线性动力学方程的近似等效解析解及数据曲线间断区域的性质, 给出间断区域的自适应连接方程构造形式及其参数确定的预置迭代方法, 进而亦给出一般曲线间断区域的映射方程组连接方法, 随后给出计算实例, 其中包括位错间断区域与回转间断区域的映射方程组及光滑连接曲线。此自适应连接方程, 可以作为经典 S 型曲线方程或 Logistic 函数的一般扩展形式(扩展型双曲正切函数)予以应用; 其中对于缓变数据曲线阶跃间断区域, 可自动计算生成连接方程形式。文中分析了非线性方程在经典 Newton 动力学方程及 RLC 串联电路电荷方程方面的兼容性; 基于自适应连接方程探讨了数据曲线或部分连续函数的一种扩展型双曲正切级数近似表示形式、磁性材料磁滞回线方程、粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程、稳定核素比结合能趋势方程、核素结合能的理论最大值及其相应质子数、势能函数曲线趋势方程(诸如双原子分子势能函数曲线方程)、自然饱和过程方程(诸如钢材材料断裂韧性方程)及金属或岩石蠕变过程方程。**关键词:** 非线性动力学方程, 数据曲线间断区域, 自适应连接方程, 映射连接方程, 磁滞回线方程, 粒子统计分布方程, 比结合能方程, 势能函数曲线方程, 自然饱和过程方程, 蠕变过程方程

Research on adaptive connection equation in discontinuous area of data curve

YAN Kun

(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

Abstract In this paper, by discussing approximate equivalent analytical solution of nonlinear dynamics equation and some properties in discontinuous area of data curve, a general constructing form of adaptive connection equation and preset iteration method determining parameters in discontinuous area are given. And then, a connecting method of the mapping equations for the discontinuous areas of general curves is also given. Subsequently, computing examples which included the discontinuous areas with dislocation and turn-back are given too. This adaptive connection equation can be applied as a general form of expansion (extended hyperbolic tangent function) of the classical S-curve (sigmoid curve) equation or Logistic function, and for step discontinuous area of slowly varying data curve, its form of the adaptive connection equation can be obtained by automatic calculating. In this paper, compatibility of the nonlinear equation in classical Newton dynamic equation and the charge equation of the RLC series circuit is analyzed. Basing on the form of the adaptive connection equation, an approximate expression of extended hyperbolic tangent series for the data curve or partial continuous functions, equations of magnetic hysteresis loop for magnetic material, extended form of average energy equation (or Einstein-Stern equation) and tendency differential equation of the average particle number for the statistical distributions of the particles, equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide, a theoretical maximum of the nuclear binding energy and its corresponding proton number, curvilinear equation of potential energy function (such as curvilinear equation of potential energy function of diatomic molecule, etc), equation of natural saturation process (such as tree growth and physical reaction or chemical reaction process, equation of fracture toughness for steel material, etc) and equation of typical creep process for metal or rock material are explored and analyzed tentatively.

Keywords nonlinear dynamics equation, discontinuous area of data curve, adaptive connection equation, connecting method of the mapping equations, equations of magnetic hysteresis loop, equation of statistical distributions of the particles, equation of average binding energy per nucleon, curvilinear equation of potential energy function, equation of natural saturation process, equation of creep process

0 引言

在自然科学及工程技术的诸多领域, 对数据曲线间断区域或等效间断区域予以描述是很重要的研究方向, 其尤以确定连接方程构造形式及参数计算方法为关键。

本文通过对非线性方程近似等效解析解及数据曲线在间断区域的讨论, 采用趋势分析途径^[1], 给出自适应连接方程构造形式及参数的预置迭代计算方法, 进而亦给出一般曲线间断区域的映射方程组连接方法, 实例计算表明连接效果很好。本文提出了现象演化状态间转变方程, 其一般遵循最优光滑曲线路径方程形式的原则; 给出并分析了非线性 Newton 动力学方程、包含二种新的非线性电路元件的 RLCNG 串联电路方程、数据曲线或连续函数的扩展型双曲正切级数形式及自然演化平衡法则、粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性方程、稳定核素比结合能方程、核素结合能最大值及其质子数、饱和及蠕变过程方程等方面相关内容。

与 Bézier 函数曲线及相关方法等^[2-4]比较, 本文方法主要侧重于数据曲线间断区域的自适应连接、或光滑穿过折线区域, 其可直接应用到对类如时间序列局部折线及阶跃数据进行自适应光滑处理、曲线间断区域或缠绕区域(等效间断区域)的非线性动力学方程趋势分析描述及简化处理、数据主曲线优化与回归分析融合等方面。

1 数据曲线间断区域的自适应连接方程形式构造

1.1 非线性动力学方程的一种简洁形式及其兼容性

对于自然现象演化过程, 其多变量微分方程组的一个解或近似解, 在略去高阶项后可部分地表述为非线性方程

$$\omega_1 \frac{dy}{dx} + \omega_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \sigma_{IE} + \sigma_1 y + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 y^3 = \psi_{EE}, \quad (1)$$

式中 x 、 y 为关联参量, 或复合参量; ω_1 、 ω_2 、 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 皆为关于 x 、 y 的系函数; σ_{IE} 为内激励函数, ψ_{EE} 为外激励函数。

作者简介 阎坤, 1962年10月生, 吉林榆树人, 1983年8月毕业于长春地质学院; 数值解析方向, 目前主要从事非线性科学研究。

(Email: yankun@nature.ac.cn)

方程(1)式中多项式部分可视为一待定函数的三阶 Taylor 级数展开并省略余项; 其兼容 Newton 动力学位移 y -时间 t 方程、RLC 串联电路电荷量 Q -时间 t 方程为

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu_0 \frac{dy}{dt} + b_{IE} + k_0 y + n_0 y^2 + g_0 y^3 = F_{EE}, \quad (2)$$

$$L_0 \frac{d^2 Q}{dt^2} + R_0 \frac{dQ}{dt} + S_{IE} + \frac{1}{C_0} Q + N_0 Q^2 + G_0 Q^3 = U_{EE}, \quad (3)$$

在方程(2)式中 m_0 、 μ_0 、 k_0 分别为质点质量、介质阻力系数、介质弹性系数, F_{EE} 为作用力; b_{IE} 为自激励函数; n_0 、 g_0 为非线性极限系数; 当 $n_0 = 0$ 、 $g_0 = 0$ 时, 方程(2)式转化为经典 Newton 动力学方程形式

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu_0 \frac{dy}{dt} + k_0 y = F_{EE} - b_{IE}; \quad (4)$$

在方程(3)式中 L_0 、 R_0 、 C_0 分别为串联电路中的电感值、电阻值、电容值, U_{EE} 为电压源激励函数; S_{IE} 为自激励函数, 拟此等效元件名称为“电态元件, statransor”, 文字及图形符号为“S, —□—”, 电压方程 $U_S = S_{IE}$; N_0 、 G_0 为非线性元件特征值, 其都具有构成新型非线性电子存储器及高灵敏度传感器的特性, N_0 量纲为 $[m^2 kgs^{-5} A^{-3}]$, 拟其名称为“电存储器, nonlinstor”, 文字及图形符号为“N, —□—”, 电压方程为

$$U_N = N_0 Q^2; \quad (5)$$

G_0 量纲为 $[m^2 kgs^{-6} A^{-4}]$, 拟其名称为“电敏器, geomsentor”, 文字及图形符号为“G, —□—”, 电压方程为

$$U_G = G_0 Q^3; \quad (6)$$

当 $N_0 = 0$ 、 $G_0 = 0$ 时, 方程(3)式即由 RLCNG 串联电路方程转化为经典 RLC 串联电路方程形式

$$L_0 \frac{d^2 Q}{dt^2} + R_0 \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C_0} Q = U_{EE} - S_{IE}. \quad (7)$$

对方程(2)式, 当 μ_0 、 k_0 、 g_0 皆为 0 时, 有方程

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + n_0 y^2 = F_{EE} - b_{IE}; \quad (8)$$

当 m_0 、 n_0 、 b_{IE} 、 F_{EE} 为常量时, 积分上式解得能量方程

$$\frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{3} n_0 y^3 = [F_{EE} - b_{IE}] y + \phi_E, \quad (9)$$

这里 ϕ_E 为能量待定常量; 在 $n_0 \neq 0$ 、 $F_{EE} = b_{IE}$ 、 $\phi_E = 0$ 时, 即得位移 y 、速度 V_n 、加速度 g_n 的解为

$$y = -\frac{6m_0}{n_0[t+t_0]^2}, V_n = \frac{12m_0}{n_0[t+t_0]^3}, g_n = -\frac{36m_0}{n_0[t+t_0]^4}; \quad (10)$$

式中 $V_n \ll c$, c 为真空中光速, t_0 为时间待定常量。

对于电存元件(或电存储器), 考虑 Q 为简谐波函数形式

$$Q = Q_0 \cos[2\pi f_0 t + \theta_0],$$

这里 Q_0 、 $f_0 = T_N^{-1}$ 及 θ_0 分别为 Q 的简谐波函数电荷量振幅、频率及初始相位, T_N 为简谐波周期。

由方程(5)式得电存元件的电流有效值 I_{Neff} 及电压有效值 U_{Neff} 分别为

$$\begin{aligned} I_{Neff} &= \sqrt{\frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 dt} \\ &= [0.5 T_N^{-1} \int_0^{T_N} [2\pi f_0 Q_0]^2 [1 - \cos[4\pi f_0 t + 2\theta_0]] dt]^{0.5} \\ &= \sqrt{2\pi f_0} Q_0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} U_{Neff} &= \sqrt{\frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} [N_0 Q^2]^2 dt} \\ &= [0.25 T_N^{-1} \int_0^{T_N} [N_0^2 Q_0^4] [1.5 + 2\cos[4\pi f_0 t + 2\theta_0] \\ &\quad + 0.5\cos[8\pi f_0 t + 4\theta_0]] dt]^{0.5} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} N_0 Q_0^2; \end{aligned} \quad (12)$$

则电存元件的阻抗 Z_N 为

$$Z_N = \frac{U_{Neff}}{I_{Neff}} = \frac{\sqrt{3} N_0 Q_0}{4\pi f_0}; \quad (13)$$

即得由微分方程(3)式引入的电存元件具有非线性、高通、变频及关联电荷的性质。

对于(1)式, 取 $\omega_2 = 0$ 、 $\omega_1 \neq 0$ 、 $\sigma_3 = 0$, 且 ω_1 、 σ_{IE} 、 σ_1 、 σ_2 、 ψ_{EE} 皆为常量; 约化常量 $\omega_1 = 1$, 即方程各项同除 ω_1 , 则当 $\sigma_2 \neq 0$ 时有简化形式

$$\frac{dy}{dx} + \sigma_1 y + \sigma_2 y^2 = \psi_{EE} - \sigma_{IE}, \quad (14)$$

该方程的解为

$$y = \begin{cases} y_0 + A \tan[\alpha(x - x_0)], & \sigma_2 \xi > 0, \\ \alpha = \sqrt{\sigma_2 \xi}, & A = -\alpha \sigma_2^{-1} \\ y_0 + A \tanh[\alpha(x - x_0)], & \sigma_2 \xi < 0, \\ \alpha = \sqrt{-\sigma_2 \xi}, & A = \alpha \sigma_2^{-1} \\ y_0 + \sigma_2^{-1} [x + \xi_0]^{-1}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中 x_0 、 ξ_0 为常量; $y(x = x_0) = y_0$, $y_0 = -0.5\sigma_1\sigma_2^{-1}$; $\xi = -g_E - 0.25\sigma_1^2\sigma_2^{-1}$, $g_E = \psi_{EE} - \sigma_{IE}$ 。

方程(14)式当 $\sigma_2 = 0$ 时得进一步简化的方程形式

$$\frac{dy}{dx} + \sigma_1 y = \psi_{EE} - \sigma_{IE}; \quad (16)$$

其解为

$$y = \begin{cases} g_E \sigma_1^{-1} + [y_{x=0} - g_E \sigma_1^{-1}] \exp(-\sigma_1 x), \sigma_1 \neq 0 \\ y_{x=0} + g_E x, \sigma_1 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

显然解 (15) 式中的双曲正切函数可进一步转化表示为

$$\begin{aligned} y &= y_0 + A \tanh[\alpha(x - x_0)] \\ &= y_0 + A \frac{\exp[\alpha(x - x_0)] - \exp[-\alpha(x - x_0)]}{\exp[\alpha(x - x_0)] + \exp[-\alpha(x - x_0)]} \\ &= y_0 - A + A \frac{2 \exp[\alpha(x - x_0)]}{\exp[\alpha(x - x_0)] + \exp[-\alpha(x - x_0)]} \\ &= y_0 - A + A \frac{2}{1 + \exp[-2\alpha(x - x_0)]}; \end{aligned} \quad (18)$$

方程(18)式中 x_0, y_0 为曲线拐点坐标, $y(x = x_0) = y_0$; 即得方程 (18) 式在 $y_0 = A$ 时其为描述经典 S 型曲线的 Logistic 函数表述形式

$$y = \frac{2y_0}{1 + \exp[-2\alpha(x - x_0)]}. \quad (19)$$

1.2 数据曲线间断区域的性质及连接方程形式构造方法

数学, 普适构造与逻辑解析二者相辅相成, 几何思想代数化与代数思想几何化之间交相辉映, 其部分要旨即是 0 及无穷皆变换或映射为可区分的有限量形式; 在临近层面, 普适构造以逻辑解析为内核, 逻辑解析以普适构造为本底; 以朴直的线性构造为始, 然后将线性在同一层面或临近层面逻辑拓展成更为一般的非线性形式, 再将非线性形式解析转化为另一层面的简洁线性运算模式。

这是数学的根本法则, 亦是数学的主旋律, 使得数学既可动态自成一体, 同时又在广泛应用于其它学科领域进行深入阐释延展的过程中相互促进共同发展。

对于数据曲线间断区域, 取始点为 $P_S(x_S, y_S)$, 其左邻域一点取为 $P_{S-}(x_{S-}, y_{S-})$; 终点为 $P_E(x_E, y_E)$, 其右邻域一点取为 $P_{E+}(x_{E+}, y_{E+})$; $x_S < x_E$; 则有始点局部平均斜率 k_S 、终点局部平均斜率 k_E 分别为

$$k_S = [y_S - y_{S-}][x_S - x_{S-}]^{-1}, \quad (20)$$

$$k_E = [y_{E+} - y_E][x_{E+} - x_E]^{-1}; \quad (21)$$

而从间断始点到终点的斜率则为

$$k_{SE} = [y_E - y_S][x_E - x_S]^{-1}. \quad (22)$$

取数据曲线间断区域平衡点(综合平衡点)坐标 x_0, y_0 及其幅值 A 的预置试算值 x_{0pv}, y_{0pv}, A_{pv} 分别为

$$x_{0pv} = g_1(x_S + x_E), \quad (23)$$

$$y_{0pv} = g_2(y_S + y_E), \quad (24)$$

$$A_{pv} = g_3(y_E - y_S); \quad (25)$$

这里 g_1, g_2, g_3 为平衡点坐标计算系数; 根据曲线间断区域的具体情况取值在 0.4~0.6, 一般地取值为 0.5。

在数据曲线间断区域的连接曲线方程 $y = f(x)$ 形式构造方向, 可根据具体间断区域于始点局部平均斜率及终点局部平均斜率的特征构造多种连接曲线方程形式; 其中简洁地, 可将连接方程在二个端点局部平均斜率近似取为具有广泛适应性的指数函数形式

$$\begin{cases} \eta_S = \zeta_S \exp[-\beta_{S0}(x - x_0)], \\ \eta_E = \zeta_E \exp[\beta_{E0}(x - x_0)]; \end{cases} \quad (26)$$

式中 η_S, η_E 分别为连接方程在数据曲线间断区域的始点局部平均斜率、终点局部平均斜率, $\eta_S \approx k_S, \eta_E \approx k_E$; $\zeta_S, \zeta_E, \beta_{S0}, \beta_{E0}$ 为待定系数。

在方程构造方向进一步将 (26) 式拆分为分式形式

$$\begin{cases} \eta_S = \zeta_S \exp[-\beta_{S0}(x - x_0)] = \zeta_S \frac{\exp[-\beta_{S1}(x - x_0)]}{\exp[-\beta_{S2}(x - x_0)]}, \\ \eta_E = \zeta_E \exp[\beta_{E0}(x - x_0)] = \zeta_E \frac{\exp[\beta_{E1}(x - x_0)]}{\exp[\beta_{E2}(x - x_0)]}; \end{cases} \quad (27)$$

这里 $\beta_{S1}, \beta_{S2}, \beta_{E1}, \beta_{E2}$ 为待定系数, 其与 β_{S0}, β_{E0} 之间的关系为

$$\beta_{S0} = \beta_{S1} - \beta_{S2}, \quad \beta_{E0} = \beta_{E1} - \beta_{E2}.$$

积分斜率方程 (27) 式, 得连接曲线方程于始点局部邻域的 y_{SE} 、终点局部邻域的 y_{EE} 可表示为

$$\begin{cases} y_{SE} = y_{S0} - \zeta_S [\beta_{S1} - \beta_{S2}]^{-1} \frac{\exp[-\beta_{S1}(x - x_0)]}{\exp[-\beta_{S2}(x - x_0)]}, \\ y_{EE} = y_{E0} + \zeta_E [\beta_{E1} - \beta_{E2}]^{-1} \frac{\exp[\beta_{E1}(x - x_0)]}{\exp[\beta_{E2}(x - x_0)]}; \end{cases} \quad (28)$$

式中 y_{S0}, y_{E0} 为积分常数。

考虑连接曲线方程 $y = f(x)$ 在平衡点(综合平衡点)处有 $y(x = x_0) = y_0$, 则在极限情况下, 由端点邻域方程

(28) 式, 即可得于此构造方向的数据曲线间断区域连接曲线方程较为简洁的形式为

$$\begin{aligned} y &= y_0 - \frac{A_{E1} - A_{S1}}{A_{E2} + A_{S2}} \\ &+ \frac{A_{E1} \exp[\beta_{E1}(x - x_0)] - A_{S1} \exp[-\beta_{S1}(x - x_0)]}{A_{E2} \exp[\beta_{E2}(x - x_0)] + A_{S2} \exp[-\beta_{S2}(x - x_0)]}; \end{aligned} \quad (29)$$

式中 $A_{S1}, A_{S2}, A_{E1}, A_{E2}$ 为待定系数;

$$y_0 - [A_{E1} - A_{S1}][A_{E2} + A_{S2}]^{-1} = y_{S0} = y_{E0},$$

$$A_{S1} A_{S2}^{-1} = \zeta_S [\beta_{S1} - \beta_{S2}]^{-1},$$

$$A_{E1} A_{E2}^{-1} = \zeta_E [\beta_{E1} - \beta_{E2}]^{-1}.$$

方程 (29) 式是多平衡点等效为一综合平衡点的形式; 更为简洁地, 当系数 $A_{S1} = A_{E1}$ 、 $A_{S2} = A_{E2}$ 时, 其成为

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\beta_{E1}(x-x_0)] - \exp[-\beta_{S1}(x-x_0)]}{\exp[\beta_{E2}(x-x_0)] + \exp[-\beta_{S2}(x-x_0)]}, \quad (30)$$

式中 $y_0 = y_{S0} = y_{E0}$, A 为待定系数;

$$A = A_{S1}A_{S2}^{-1} = A_{E1}A_{E2}^{-1} = \zeta_S[\beta_{S1} - \beta_{S2}]^{-1} = \zeta_E[\beta_{E1} - \beta_{E2}]^{-1}.$$

对方程 (30) 式的分子分母同时乘以指数因子项 $\exp[\beta_{SE0}(x-x_0)]$, 这里 β_{SE0} 为待定常量, 即有

$$y = y_0 + A \times \frac{\exp[(\beta_{E1} + \beta_{SE0})(x-x_0)] - \exp[-(\beta_{S1} - \beta_{SE0})(x-x_0)]}{\exp[(\beta_{E2} + \beta_{SE0})(x-x_0)] + \exp[-(\beta_{S2} - \beta_{SE0})(x-x_0)]};$$

取上式分母中

$$\beta_{E2} + \beta_{SE0} = \beta_{S2} - \beta_{SE0},$$

解得待定常量

$$\beta_{SE0} = 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2});$$

即有连接方程 (30) 式的一般性简化形式

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]}, \quad (31)$$

式中 α_1 、 α_2 、 α_3 为待定常量;

$$\alpha_1 = \beta_{E1} + 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2}),$$

$$\alpha_2 = \beta_{S1} - 0.5(\beta_{S2} - \beta_{E2}),$$

$$\alpha_3 = 0.5(\beta_{S2} + \beta_{E2}).$$

由 (31) 式, 得一阶及二阶微分方程形式分别为

$$\frac{dy}{dx} = A \frac{\alpha_1 \exp[\alpha_1(x-x_0)] + \alpha_2 \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]} - \alpha_3(y-y_0) \tanh[\alpha_3(x-x_0)]; \quad (32)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A \frac{\alpha_1^2 \exp[\alpha_1(x-x_0)] - \alpha_2^2 \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]} - A\alpha_3 \tanh[\alpha_3(x-x_0)] \times \frac{\alpha_1 \exp[\alpha_1(x-x_0)] + \alpha_2 \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]} - \alpha_3 \tanh[\alpha_3(x-x_0)] \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha_3^2(y-y_0)}{\cosh^2[\alpha_3(x-x_0)]}; \quad (33)$$

故得方程 (31) 式在平衡点 $x = x_0$ 、 $y(x = x_0) = y_0$ 处的一阶及二阶导数方程值分别为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}A(\alpha_1 + \alpha_2); \quad (34)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}A(\alpha_1^2 - \alpha_2^2). \quad (35)$$

方程 (35) 式表明, 方程 (31) 式为偏对称方程形式; 当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时, 拐点坐标与平衡点坐标处于同一位置。

同时方程 (32)、(33) 二式亦表明, 以逻辑解析为内核的普适构造方法建立的连接方程 (31) 式并不直接对应着较为简洁的单一非线性动力学微分方程形式。

由方程 (34) 式, 取方程 (31) 式在平衡点 $x = x_0$ 处邻域的斜率值 $\eta_{SEE} = 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2)$; 则上述连接方程的基本特征即为三斜率关系方程

$$\eta_S \approx k_S, \eta_E \approx k_E, \eta_{SEE} \rightarrow k_{SE}. \quad (36)$$

此三斜率方程为光滑曲线连接原则, 随顺知机善导究竟。

若引入适当的路径约束 (或平衡方式), 有函数 (泛函) 表述

$$W(y) = \int_{x_S}^{x_E} F(x, y, y') dx, \quad (37)$$

式中 $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'_S \approx k_S$, $y'_E \approx k_E$; 则一近似解析方法是通过类如一阶变分 Euler-Lagrange 方程

$$\delta W(y) = \delta \int_{x_S}^{x_E} F(x, y, y') dx = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0; \quad (38)$$

等相应途径确定连接方程 $y = f(x)$ 的具体表述形式。

显然方程 (31) 式的微分方程 (32)、(33) 二式形式比 (1) 式复杂。方程 (31) 式当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时, 简化为

$$y = y_0 + A \frac{\sinh[\alpha_1(x-x_0)]}{\cosh[\alpha_3(x-x_0)]}; \quad (39)$$

当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ 时, 方程 (31) 式进一步简化为

$$y = y_0 + A \tanh[\alpha(x-x_0)]; \quad (40)$$

即连接方程 (31) 式为方程 (1) 式一条件解 (15) 式中双曲正切函数的拓展形式, 描述经典 S 型曲线的 Logistic 函数 (19) 式亦为连接方程 (31) 式的简化表述。

由方程 (35) 式, 方程 (39)、(40) 二式曲线拐点坐标与平衡点坐标处于同一位置。

连接方程 (31) 式能够自适应曲线间断区域始点、终点邻域斜率, 具有多阶导数及多曲线形态, 如饱和过程与蠕变过程等, 是在平衡点处趋近于间断区域始点至终点直线斜率的最优或最简洁路径光滑曲线方程。

当间断区域的始点局部平均斜率 k_S 及终点局部平均斜率 k_E 都较高甚至趋于无穷大时, 诸如蠕变过程, 则在 $y_S < y_E$ 情况下可由方程 (31) 式的坐标置换函数形式予以描述

$$x = x_0 + A_R \frac{\exp[\alpha_{R1}(y-y_0)] - \exp[-\alpha_{R2}(y-y_0)]}{2 \cosh[\alpha_{R3}(y-y_0)]}, \quad (41)$$

这里 A_R 、 $\alpha_{R1, R2, R3}$ 皆为待定系数, 在平衡点处 $x(y = y_0) = x_0$ 。

1.3 一般曲线间断区域连接的映射方程方法

对于一般的曲线间断区域, 当其始点 $P_S(x_S, y_S)$ 、终点 $P_E(x_E, y_E)$ 先后次序呈现 $x_S \geq x_E$ 、或于平衡点处 x_0 不在 x_S 与 x_E 之间等的位错及回转情况, 则不能直接应用连接方程 (31) 式进行光滑连接。

下面以连接方程 (31) 式为基础, 给出一般曲线间断区域连接的映射方程方法。

首先将曲线间断区域始点 $P_S(x_S, y_S)$ 、终点 $P_E(x_E, y_E)$ 其一端、乃至二端数据段平移或旋转操作, 生成新的间断区域始点 $P_{mS}(x_{mS}, y_{mS})$ 、终点 $P_{mE}(x_{mE}, y_{mE})$ 的次序排列, $x_{mS} < x_{mE}$, 一般取 $y_{mS} = y_S$ 、 $y_{mE} = y_E$; 依据方程 (31) 式可得新的间断区域自适应连接方程具体形式为

$$y = y_{m0} + A \frac{\exp[\alpha_1(x - x_{m0})] - \exp[-\alpha_2(x - x_{m0})]}{2 \cosh[\alpha_3(x - x_{m0})]}, \quad (42)$$

式中 x_{m0} 、 y_{m0} 、 A 、 α_1 、 α_2 、 α_3 为新端点次序的间断区域自适应连接方程待定系数, $y(x = x_{m0}) = y_{m0}$ 。

第二步由间断区域的具体特征构建相应的映射方程 $x = x(\tau)$; $x(\tau = x_{mS}) = x_S$, $x(\tau = x_{mE}) = x_E$ (43)

这里 τ 为映射参量, $x_{mS} \leq \tau \leq x_{mE}$ 。

第三步将方程 (42) 式与方程 (43) 式联合形成映射方程组

$$\begin{cases} y = y_{m0} + A \frac{\exp[\alpha_1(\tau - x_{m0})] - \exp[-\alpha_2(\tau - x_{m0})]}{2 \cosh[\alpha_3(\tau - x_{m0})]}, \\ x = x(\tau); \quad x(\tau = x_{mS}) = x_S, \quad x(\tau = x_{mE}) = x_E \end{cases} \quad (44)$$

将该连接曲线映射到原间断区域; 然后去除由移动生成的端点数据段及相应的自适应连接曲线, 即得原一般曲线间断区域及由映射方程组给出的光滑连接曲线。

当方程 (43)、(44) 二式中的映射方程 $x = \tau$ 时, 上述映射方程即直接退化为自适应连接方程 (31) 式。

上述方程 (42) ~ (44) 式的三步映射方程方法具有较好的适应性, 可对诸多曲线间断区域予以连接描述。

同样对于坐标置换连接时于 $y_S \geq y_E$ 或 y_0 不在 y_S 与 y_E 之间情况下的较复杂间断区域, 可参照上述映射方程方法, 进行端点数据段移动生成新的间断区域始点 $P_{mS}(x_{mS}, y_{mS})$ 、终点 $P_{mE}(x_{mE}, y_{mE})$, $y_{mS} < y_{mE}$, $x_{mS} = x_S$ 、 $x_{mE} = x_E$; 依据坐标置换方程 (41) 给出新间断区域的自适应连接方程具体形式, 然后根据间断区域特征构建映射方程 $y = y(\tau)$, 形成映射方程组

$$\begin{cases} x = x_{m0} + A_{Rm} \frac{\exp[\alpha_{R1}(\tau - y_{m0})] - \exp[-\alpha_{R2}(\tau - y_{m0})]}{2 \cosh[\alpha_{R3}(\tau - y_{m0})]}, \\ y = y(\tau); \quad y(\tau = y_{mS}) = y_S, \quad y(\tau = y_{mE}) = y_E \end{cases} \quad (45)$$

进行映射连接分析; 这里 x_{m0} 、 y_{m0} 、 A_{Rm} 、 α_{R1} 、 α_{R2} 、 α_{R3} 为新端点次序排列的间断区域自适应连接方程待定系数; 且有

$$x(y = y_{m0}) = x_{m0}, \quad y_{mS} \leq \tau \leq y_{mE}.$$

上述二维空间曲线间断区域的连接方程计算方法为多维空间数据组间断区域的光滑自适应连接提供运算基础。

1.4 自适应连接方程与非线性动力学方程的关系及最优或最简洁路径光滑曲线原理

1.4.1 非线性微分方程的等效解析解方法

对于方程 (1) 式, 其近似等效解析解的分析方法为: 简化难解的非线性方程为可解或易解的线性或非线性方程, 解出其解析解, 根据分析方向或需要拓展该解析解形式为原微分方程的初始近似等效解析解, 将此解代入原方程中试算或对比解析解, 然后对此解予以修正再代入原方程循环试算, 确定最终近似等效解析解具体形式。

上述分析表明方程 (29) 式及 (31) 式皆为方程 (1) 式条件解析解 (15) 式中双曲正切函数的一拓展形式, 即从非线性动力学方程方面考察, 方程 (31) 式为方程 (1) 式的一近似等效解析解形式; 其中方程 (31) 式有 x_0 、 A 、 α_1 、 α_2 、 α_3 共计 5 个待定系数; 方程 (1) 式在 $\omega_2 \neq 0$ 时亦可取有 $\varpi_1 \omega_2^{-1}$ 、 $\sigma_1 \omega_2^{-1}$ 、 $\sigma_2 \omega_2^{-1}$ 、 $\sigma_3 \omega_2^{-1}$ 、 $[\psi_{EE} - \sigma_{IE}] \omega_2^{-1}$ 共计 5 个常量; 应用近似等效解析解方法, 将方程 (31) 式代入到方程 (1) 式中, 导数部分及多项式部分皆出现包含在

$$\begin{aligned} & [\cosh[\alpha_3(x - x_0)]]^{-3}, \\ & [\cosh[\alpha_3(x - x_0)]]^{-2}, \\ & [\cosh[\alpha_3(x - x_0)]]^{-1} \end{aligned}$$

的函数项以及相关常数项, 附加方程 (1)、(31) 二式在 $x = x_0$ 处平衡点附近临域的关系方程

$$0.5A\varpi_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \sigma_1 y_0 + \sigma_2 y_0^2 + \sigma_3 y_0^3 = \psi_{EE} - \sigma_{IE}; \quad (46)$$

进而确定方程 (31) 式诸系数与方程 (1) 式诸常量之间关系的方程组, 近似给出方程 (31) 式中诸系数的单值或多值表述。

应指出, 近似等效解析解方法仅是一种趋势性分析途径, 尤其是等效解析解的函数形式与原非线性微分方程的内涵相比较过于简单或过于复杂时, 难以求出近似等效解析解中全部系数与原微分方程中诸常量的关系表达式, 此亦为近似等效解析解方法的固有不足及局限性。

依据方程 (1) 式的条件解 (15) 式及拓展方程 (31) 式, 方程 (3) 式亦有电荷量的双曲正切函数解或拓展型双曲正切曲线等效解析解, 电存元件符号 “—|—” 及电敏元件符号 “—|—” 即是对 RCNG 串联电路直接输出电荷量双曲正切曲线或拓展型双曲正切曲线的标记。

1.4.2 自然最优原则或自然简洁原则

自然最优原则或自然简洁原则: 现象演化状态间的转变方程在一般情况下遵循自然最优或最简洁路径光滑曲线方程形式, 在趋势层面由可方程 (1) 式描述, 其近似等效解析解 (31) 式即为此状态转变方程具体形式之一, 乃至为最优路径光滑曲线方程或等效方程形式之一。

在此状态间转变最优或最简洁路径光滑曲线方程原则的意义上, 包括在波动时频率及振幅取相应极限值等, 初步表明方程 (1) 式实为一微分方程组的极限解形式。

在近似等效情况下, 一个平衡性或激励平衡性的动力学演化微分方程, 一般对应着一个泛函变分表述形式。

由方程 (1) 式还可得一简单的兼容性微分方程形式

$$\omega_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [\omega_{N0} + \omega_{N1}y] \frac{dy}{dx} + \sigma_1 y = \psi_{EE} - \sigma_{IE}, \quad (47)$$

式中 $\omega_1 = \omega_{N0} + \omega_{N1}y$, ω_{N0} 、 ω_{N1} 为常量, ω_2 、 σ_1 、 $\psi_{EE} - \sigma_{IE}$ 皆为关于的系函数。

方程 (47) 式具有显著的变频波动特征; 当 $\omega_{N1} = 0$ 时, 其为二阶线性微分方程; 而当 $\sigma_1 = 0$ 、 $\psi_{EE} - \sigma_{IE} = 0$ 、 ω_2 为常量时, 其为双曲正切函数的非线性微分方程形式

$$\omega_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [\omega_{N0} + \omega_{N1}y] \frac{dy}{dx} = 0. \quad (48)$$

根据天体运行轨道的一般性 Binet 方程^[5]

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = u_0 [2 \exp[4c^{-2}u + 4\beta] - \exp[2c^{-2}u + 2\beta]]; \quad (49)$$

弱场时因 $4c^{-2}u + 4\beta \ll 1$, 将方程 (49) 式予以二阶 Taylor 级数展开得

$$\frac{d^2 \tau}{d\theta^2} + \kappa_1 \tau^2 + \kappa_2 = 0, \quad \tau = u - \kappa_0 \quad (50)$$

式中

$$u = \frac{G_N M_0}{r}, \quad u_0 = \frac{G_N M_0}{a(1-e^2)}; \quad \beta = -\frac{G_N M_0}{2c^2 a};$$

$$\kappa_0 = c^2 [(28u_0)^{-1} (c^2 - 6u_0) - \beta], \quad \kappa_1 = -14u_0 c^{-4},$$

$$\kappa_2 = u_0 [3.5c^{-4} \kappa_0^2 - 14\beta^2 - 6\beta - 1];$$

方程 (50) 式即为非线性微分方程 (1) 式的一特殊形式; 这里 G_N 为 Newton 引力常数, c 为真空中光速, M_0 为主星体质量, r 、 θ 、 a 、 e 分别为次星体公转轨道的极坐标矢径、弧度、轨道半长径、轨道偏心率。

在上述意义下, 线性总是同一层面非线性的极限表述, 而非线性则是另一层面线性的近似形式; 当将经典饱和过程在极限上的定值替换为演化方程时, 则一般的非饱和过程即可转化为广义饱和过程; 其有三个层面: 定值 (短程局部区域)、定演化趋势 (中程较为复杂)、定演化规律及关于演化规律的规律 (长程上演化规律之间的跳转); 这也是动力学微分方程研究的主旨内容; 在此第三层面, 由现象演化过程诸阶段的系列规律构成规律谱系或规律谱阵; 此中规律可以进一步细化为细微的规律谱系或规律谱阵, 规律之间通过常数次第解析展开

进行连接, 规律谱系或规律谱阵可在趋势上凝聚为一个规律。在此第三层面也即基本近于出离数学及物理学了, 尤为重要的是在此层面尽头可将数学及物理学从人生华丽舞台转化为人生朴素台阶, 这是人生至为关键的一步; 传递和历经具有等效性, 变换和映射没有疆界。其中之一是, 基于 Euler 公式或双曲正切函数得无穷的虚数标记方程^[6]

$$\exp[i \arctan i] = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (51)$$

$$\ln 0 = [n\pi + \arctan i]i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (52)$$

而下面二个常系数置换方程在趋势上具有等效的条件解

$$\frac{dx}{dy} + \sigma_{11}x^2 + \sigma_{12} = 0, \quad (53)$$

$$\frac{dy}{dx} + \sigma_{21}y^2 + \sigma_{22} = 0; \quad (54)$$

此二方程条件解及变形方程 (同 (39) 式形式) 分别为

$$y = 0.93 \times 2\pi^{-1} \arctan[0.1(x \pm 1)], \quad (55)$$

$$y = 0.8 \frac{\sinh[0.0550(x \pm 1)]}{\cosh[0.0544(x \pm 1)]}; \quad (56)$$

其类如软磁材料或纳米粒子磁滞回线^[7]趋势性方程简略形式; 二方程曲线如图 1 所示, 这里只显示右边单边部分。

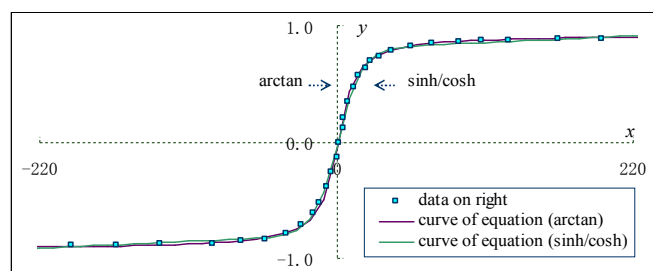


图 1 软磁材料磁滞回线右边单趋势方程等效曲线图

Fig. 1 Equivalent curves figure of tendency equations of right single magnetic hysteresis loop for soft magnetic material which obtained from arctangent function and hyperbolic tangent function

对于一般磁性材料, 基于方程 (53) 式给出的饱和磁滞回线左右单边轮廓层面为方程 (57) 式, 其曲线如图 2 所示。

$$y = 1.11 \times 2\pi^{-1} \arctan[0.035(x \pm 69)] \mp 0.03. \quad (57)$$

这里图 1 及图 2 中的数据为图形曲线比例数据, 方程与数据相关系数皆大于 0.998。

磁滞曲线可有多种方程阐释, 上述方程仅是在唯象层面的描述, 不具有机理解析上的意义。

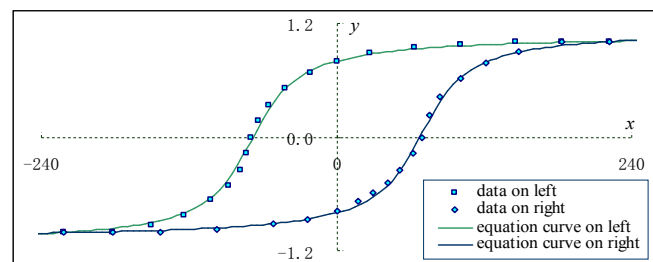


图 2 磁性材料饱和磁滞回线趋势方程曲线图

Fig. 2 Curves figure of tendency equation of saturation magnetic hysteresis loop for magnetic material which obtained from arctangent function

1.5 连续函数扩展型双曲正切级数及自然演化平衡法则

依据方程 (31) 式, 部分数据曲线或单调连续函数 $y = f(x)$ 可近似展开为如下级数形式

$$f(x) = f(x_{01}) - A_1 + \sum_{\Lambda=1}^{\Theta} A_{\Lambda} \left[1 + \frac{\exp[\alpha_{\Lambda}(x - x_{0\Lambda})] - \exp[-\beta_{\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]}{2 \cosh[\gamma_{\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]} \right] + \lambda_s, \quad (58)$$

这里 $f(x_{01})$ 为初始段平衡点纵坐标; Θ 、 Λ 为自然数, $\Theta \geq 1$ 、 $\Theta \geq \Lambda \geq 1$; $x_{0\Lambda}$ 为 $y = f(x)$ 曲线各分段中心平衡点横坐标; A_{Λ} 、 α_{Λ} 、 β_{Λ} 、 γ_{Λ} 为各分段曲线形态系数; λ_s 为级数整体偏移量。

其中对于非单调的连续函数, 可参照方程 (42) ~ (45) 式的映射方程组方法予以描述。

方程 (58) 式即阐释了自然现象演化一个基本法则。

自然演化平衡法则: 诸多现象演化过程都存在阶段性极限, 极限之间状态转化传递, 逐次与演化环境相应层面动态平衡, 演化平衡过程可由方程 (58) 式予以趋势性近似描述。

在数学描述上, Taylor 级数及 Fourier 级数具有主项大区域定调、次项逐级细节修正逼近的特征; 而方程 (58) 式表述的级数, 则具有诸项逐阶渐近的特征, 前一项主要为后一项提供延展台阶; 其不同于 Taylor 级数的幂函数叠加形式, 而类似于 Fourier 级数的序列函数叠加形式, 比较适用于对开放系统部分参量演化的趋势性分析等方面。

特别地, 若曲线诸分段在接点处近似等效为水平线, 可取 $\alpha_{\Lambda} \approx \beta_{\Lambda} \approx \gamma_{\Lambda}$, 则有 $\lambda_s \approx 0$, 方程 (58) 式即简化为

$$f(x) = f(x_{01}) - A_1 + \sum_{\Lambda=1}^{\Theta} A_{\Lambda} [1 + \tanh[\alpha_{\Lambda}(x - x_{0\Lambda})]]. \quad (59)$$

方程 (59) 式较为朴直简洁, 易于确定其具体方程的表述形式。

由方程 (59) 式, 可构造窗函数 ($\alpha_1 > 0$ 、 $\alpha_2 > 0$) 与台阶函数 ($\alpha_1 \alpha_2 < 0$) 为

$$w = 0.5[\tanh[\alpha_1(x - x_{01})] - \tanh[\alpha_2(x - x_{02})]]; \quad (60)$$

其中时域窗函数在 $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ 时还可表示为

$$w = 0.5[1 - \tanh[\alpha_1(x - x_{01})] \tanh[\alpha_2(x - x_{02})]]. \quad (61)$$

由方程 (61) 式构造时域 t 的窗函数 w_t , 可得岩体爆破单孔单响振动加速度 g_R 的趋势方程 (唯象拟合方程)

$$g_R = w_t \sin[\alpha_R(t - t_{R0})], \quad (62)$$

式中 α_R 、 t_{R0} 为常量; 亦可由变频方程 (47) 式近似得起振段等效变频的幅值衰减振动趋势性方程形式; 方程曲线如图 3 所示。

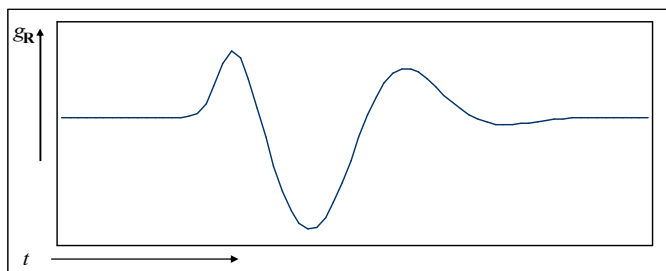


图 3 岩体爆破单孔单响振动加速度拟合方程曲线图

Fig. 3 Fitting equation curve figure of vibration acceleration of single hole blasting of once each time point in rock mass blasting process

1.6 基于饱和过程方程的广义分布函数形式延展方向

在普遍意义上, 一个严格的饱和过程方程, 包括可转化为严格饱和过程的蠕变过程方程等形式, 因其在趋势上具有极限性特征, 则一般地将其调零归一化后即转换为广义分布函数形式, 其亦对应着一个广义分布密度函数。

取一严格的饱和过程方程形式为

$$y_{es} = f_{es}(x), \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (63)$$

其饱和性或极限性特征为

$$y_{es}(x \rightarrow -\infty) = y_{es \min}, \quad y_{es}(x \rightarrow +\infty) = y_{es \max};$$

$$y_{es \max} > y_{es \min}, \quad \frac{d f_{es}(x)}{d x} > 0.$$

即有调零 ($[f_{es}(x) - y_{es \min}]$) 归一化 ($[y_{es \max} - y_{es \min}]^{-1}$) 后转换为广义分布函数 $y_{GD} = f_{GD}(x)$ 的形式为

$$y_{GD} = f_{GD}(x) = \frac{f_{es}(x) - y_{es \min}}{y_{es \max} - y_{es \min}}, \quad (64)$$

式中 $y_{GD}(x \rightarrow -\infty) = 0$, $y_{GD}(x \rightarrow +\infty) = 1$ 。

由广义分布函数 (64) 式得其所对应的广义分布密度函数 $y_{GDD} = f_{GDD}(x)$ 的形式则为

$$y_{GDD} = f_{GDD}(x) = \frac{d y_{GD}}{d x} = \frac{1}{y_{es \max} - y_{es \min}} \frac{d f_{es}(x)}{d x}. \quad (65)$$

由于部分蠕变过程及一系列能够转化或等效为这类蠕变过程的现象演化过程 (如材料断裂、器件电磁击穿、流体湍流等), 可以进一步转化为严格的对称或偏对称饱和过程, 所以其描述方程调零归一化后也同样对应着相应的广义分布函数及广义分布密度函数, 其在极端情况下包括具有小幅值振荡性质的广义分布密度函数形式。

当广义分布密度函数 $y_{GDD} = f_{GDD}(x)$ 已知时, 则其广义分布函数 $y_{GD} = f_{GD}(x)$ 及广义数学期望 $E_{GD}(X)$ 为

$$y_{GD}(x) = \int_{-\infty}^x f_{GDD}(t) dt, \quad y_{GD}(x \rightarrow +\infty) = 1 \quad (66)$$

$$E_{GD}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{GDD}(x) dx. \quad (67)$$

上述饱和过程方程与广义分布方程的转化关系, 一方面将广泛的严格饱和过程方程及可转化为严格饱和过程的方程形式引入数理统计中成为广义分布函数及广义分布密度函数; 另一方面, 将数理统计中分布函数及分布密度函数的理论及思想延展到自然科学及社会科学诸多领域解析框架中并继而与之融为一体。

1.7 粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程

带有空间—时间坐标及速度参量的窗函数可给出波或粒子的定域性方程，而与之对应的背景信息则具有非定域性，经广域的信息传递及同机理解析产生关联效应。

一般地，在数据运算及处理过程需保留+0及-0的标记以与+∞及-∞相对应。下面给出粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程。

绝对温度是描述自然现象的统计性参量之一，历史上，其基本与分子及原子等物质构成层面的动能相联系。1913年，Einstein和Stern基于Planck黑体辐射公式思想、简谐振子的Einstein本征能量

$$E = \left[n + \frac{1}{2} \right] h\nu, \quad 0 \leq n < +\infty$$

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = h\nu,$$

及 Boltzmann 粒子数分布 j 与能量 E 的关系方程

$$\Delta j \propto \exp[-E(kT)^{-1}] \Delta E;$$

给出平均能量 \bar{E}_{ES} 与频率 ν 及绝对温度 T 的关系方程，即 Einstein—Stern 平均能量方程^[8]

$$\bar{E}_{ES} = \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1},$$

这里 n 为自然数， h 为 Planck 常数， k 为 Boltzmann 常数。

现将 n 加以有限自然数 q 限制，同时引入基底能量 E_0 ，则有本征能量为

$$E = E_0 + [n + n_\Delta] h\nu, \quad 0 \leq n \leq q, \quad q \gg 1 \quad (68)$$

这里 $E_0 = E(\nu = 0)$ ， n_Δ 为待定常数。对于简谐振子， $n_\Delta = n_{\Delta E} = 0.5$ ， $n_{\Delta E}$ 为 Einstein 简谐振子能量常数；在考虑 E_0 为常数时， $\Delta E = h\nu$ ，得平均能量方程扩展形式

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\sum_{E=E_0+0.5h\nu}^{E_0+(q+0.5)h\nu} E \exp[-E(kT)^{-1}] \Delta E}{\sum_{E=E_0+0.5h\nu}^{E_0+(q+0.5)h\nu} \exp[-E(kT)^{-1}] \Delta E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial(kT)^{-1}} \ln \sum_{E=E_0+0.5h\nu}^{E_0+(q+0.5)h\nu} \exp[-E(kT)^{-1}] \\ &= -\frac{\partial}{\partial(kT)^{-1}} \ln \exp[-(E_0 + 0.5h\nu)(kT)^{-1}] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial(kT)^{-1}} \ln \frac{1 - \exp[-(q+1)h\nu(kT)^{-1}]}{1 - \exp[-h\nu(kT)^{-1}]} \\ &= E_0 + \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1} \\ &\quad - \frac{(q+1)h\nu}{\exp[(q+1)h\nu(kT)^{-1}] - 1}. \quad (69) \end{aligned}$$

由平均能量方程扩展形式 (69) 式，在 $E_0 \ll 0.5h\nu$ 、 $q \rightarrow +\infty$ 时，得 Einstein—Stern 平均能量方程

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \bar{E} = \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1} = \bar{E}_{ES}. \quad (70)$$

根据扩展方程 (70) 式，在 νT^{-1} 减小方向趋势性近似有

$$\bar{E} = \begin{cases} E_0 + \frac{1}{2} h\nu, & \frac{h\nu}{kT} \gg 1 \\ E_0 + \frac{e-2}{e-1} kT, & \frac{h\nu}{kT} = \frac{1}{q+1} \\ E_0 + \frac{1}{2} h\nu, & 0 < \frac{h\nu}{kT} \ll \frac{1}{q+1} \end{cases} \quad (71)$$

方程 (69) 式包含 Einstein—Stern 平均能量方程，同时给出的 (71) 式中后二个近似式与目前已有研究结论明显不同，其为甚低频段、甚高温区的量子化效应研究提供参考。

在方程 (68) 中引入有限自然数 q 限制及基底能量 E_0 的分析，不会对 Boltzmann 统计思想基础产生根本影响。

方程 (69) 式的一个前提条件为

$$\lim_{E \rightarrow +\infty} \exp[-E(kT)^{-1}] \rightarrow 0; \quad (72)$$

即方程 (69) 式不适用于 $T < 0$ 的区域；如果直接跨越 $T = 0$ ，则方程 (69) 式于 $T = 0$ 邻域存在零点能量阶跃

$$\bar{E}_{\pm 0 \text{ step}} = \bar{E}(T \rightarrow -0) - \bar{E}(T \rightarrow +0) = qh\nu. \quad (73)$$

真空、光速、绝对零度、超流(固)体，真空背景、超光速、自由相体，是分属于同类相变附近层面紧密关联问题；而零点能量即与天体构成及运行背景、引力机理、超光速、波粒二象性、量子纠缠、Casimir 力、Higgs 机制等密切相关，是解析开 G_N 、 c 、 h 的重要方向。目前描述的四种作用力应仅是自然界中诸多作用力的一部分，对其所作的统一框架探索在机械论层面无有止境。根本上，基本常数是包含更基本常数的局部能量时空尺度方程数值形式近似表示，现象演化过程的规律谱系通过基本常数的次第解析展开连接延展；由此，数理逻辑是开环周期体系。

作为探讨，若将 (69) 式亦适用于 $T < 0$ 的区域，则一途径是直接对 Boltzmann 统计分布方程中的绝对温度 T 取绝对值 $\Delta j \propto \exp[-E(k|T|)^{-1}] \Delta E$ ，方程 (69) 式成为

$$\bar{E} = E_0 + \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(k|T|)^{-1}] - 1} - \frac{(q+1)h\nu}{\exp[(q+1)h\nu(k|T|)^{-1}] - 1}. \quad (74)$$

若用数据处理方法，参照 (70) 式的连续变化形式

$$\bar{E} = E_0 + \frac{1}{2} h\nu + kT \int d \frac{x}{\exp x - 1}, \quad (q+1) \frac{h\nu}{kT} \geq x \geq \frac{h\nu}{kT} \quad (75)$$

这里 x 取值从 $(q+1)h\nu(kT)^{-1}$ 到 $h\nu(kT)^{-1}$ 连续变化，则可得一探讨性的覆盖 $T < 0$ 区域的平滑平均能量方程为

$$\bar{E}_s = E_0 + \frac{1}{2} h\nu + b|T| \frac{\exp[h\nu(b|T|)^{-1}] - 1}{\exp[h\nu(k|T|)^{-1}] - 1}, \quad (76)$$

式中 b 为待定常数， $b \gg k$ 。

对于 (76) 式，当 $E_0 \ll 0.5h\nu$ 、 $T > 0$ 、 $h\nu(bT)^{-1} \ll 1$ 时，即转化为 Einstein—Stern 平均能量方程

$$\begin{aligned} \bar{E}_s &= \frac{1}{2} h\nu + bT \frac{[1 + h\nu(bT)^{-1}] - 1}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1} \\ &= \frac{1}{2} h\nu + \frac{h\nu}{\exp[h\nu(kT)^{-1}] - 1} = \bar{E}_{ES}. \quad (77) \end{aligned}$$

而当 $E_0 \ll 0.5h\nu$ 、 $h\nu(b|T|)^{-1} \gg 1$ 时，由 (76) 式得

$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \bar{E}_s = \frac{1}{2} h\nu + \lim_{|T| \rightarrow 0} \frac{b|T|}{\exp[h\nu(k^{-1} - b^{-1})|T|^{-1}]} = \frac{1}{2} h\nu. \quad (78)$$

作为对粒子系统统计分布的趋势性探讨及进一步分析, 简单地, 参考方程 (1) 式, 可初步构建绝对温度为 T 时分布在能级 E 上一个量子态上平均粒子数 n_s 的非线性微分方程趋势性简略形式为

$$z_0 \frac{d^2 n_s}{dn_E^2} + \frac{dn_s}{dn_E} + z_{IE} + n_s + z_s n_s^2 + z_c n_s^3 = z_{EE}, \quad (79)$$

这里 $n_E = E(kT)^{-1} + \alpha_E$, α_E 为与 kT 相关的待定参量, 是对 n_E 中主项 $E(kT)^{-1}$ 予以补充的参量, 诸如在部分分布中包含着化学势 μ 项, 即 $\alpha_E = -\mu(kT)^{-1} + \alpha_C$, α_C 为常量; z_0 、 z_s 、 z_c 为待定常数, z_{IE} 为内激励函数, z_{EE} 为外激励函数; 一般取 $n_s(n_E \rightarrow +\infty) = 0$ 。

对于方程 (79) 式, 当内激励函数与外激励函数平衡 $z_{IE} = z_{EE}$ 、及 $z_0 = 0$ 、 $z_c = 0$ 时, 有简略微分方程

$$\frac{dn_s}{dn_E} + n_s + z_s n_s^2 = 0; \quad (80)$$

在 $dn_s/dn_E = 0$ 时即得方程 (80) 式的二个常量解为

$$n_s = 0; \quad n_s = -z_s^{-1}, \quad z_s \neq 0.$$

依据方程(80)式, 当 $n_s > 0$ 时, 则在 $z_s = 0$, $z_s \neq 0$ 、 $z_s^{-1} + n_s > 0$, $z_s \neq 0$ 、 $z_s^{-1} + n_s < 0$ 三种情况下分别得

$$\ln n_s = -n_E + B_1, \quad (81)$$

$$\ln n_s - \ln[z_s^{-1} + n_s] = -n_E + B_2, \quad (82)$$

$$\ln n_s - \ln[-z_s^{-1} - n_s] = -n_E + B_3; \quad (83)$$

进而得方程 (80) 式的三个条件解析解形式分别为

$$n_s = \exp[-(E - \mu)(kT)^{-1} - (\alpha_C - B_1)], \quad (84)$$

$$n_s = \frac{z_s^{-1}}{\exp[(E - \mu)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_2)] - 1}, \quad (85)$$

$$n_s = \frac{-z_s^{-1}}{\exp[(E - \mu)(kT)^{-1} + (\alpha_C - B_3)] + 1}; \quad (86)$$

这里 B_1 、 B_2 、 B_3 为待定常量。

上述三式初步给出绝对温度为 T 时在能级 E 上一个量子态中平均粒子数的趋势性分布形式。作为简单对比, 三式依次当 $z_s = 0$ 、 $\alpha_C = B_1$, $z_s = 1$ 、 $\alpha_C = B_2$, $z_s = -1$ 、 $\alpha_C = B_3$ 时即分别对应着 Maxwell-Boltzmann 统计分布、Bose-Einstein 统计分布及 Fermi-Dirac 统计分布里绝对温度为 T 时在能级 E 上一量子态中平均粒子数诸方程形式

$$n_s = \exp[-(E - \mu)(kT)^{-1}], \quad z_s = 0 \quad (87)$$

$$n_s = \frac{1}{\exp[(E - \mu)(kT)^{-1}] - 1}, \quad z_s = 1 \quad (88)$$

$$n_s = \frac{1}{\exp[(E - \mu)(kT)^{-1}] + 1}; \quad z_s = -1. \quad (89)$$

2 连接方程的适应性

对于自然现象, 数理方程描述虽不究竟但亦颇有力量; 理论框架相对于现象演化多为趋势性概述, 乃至仅是局部轨迹割线或切线方向的阐释, 但透过对现象网络

阵列中一个节点的深刻认识, 仍可获得对其它节点的简略理解, 虽然每个节点又都包含着无穷层面的无穷问题。

下面对有关自然现象的趋势性描述不具有原理层面的解析意义, 其远离纲领性的主线脉络, 是悄然路过科学台阶、眺望自然远峰的并行途径, 待定系数过多及与物理学和力学常数或基础方程没有建立普适联系是主要原因, 基本属于探讨性的描述, 其旨在介绍连接方程及复合函数形式对自然现象变化过程于趋势或包络层面上的适应性。

2.1 稳定核素比结合能方程及核素结合能的理论最大值

基于 (31) 式, 得稳定核素比结合能 ε (MeV) 与核子数 A_N 的关系方程 (90) 式, 曲线如图 4 所示, 稳定核素比结合能数据来自文献[9], 方程与数据相关系数 0.9696。

$$\varepsilon = 9.5 \frac{\exp[0.04(A_N - 1)] - \exp[-0.50(A_N - 1)]}{2 \cosh[0.041(A_N - 1)]}; \quad (90)$$

继而得稳定核素结合能方程 E_N 为

$$E_N = A_N \varepsilon = 9.5 A_N \frac{\exp[0.04(A_N - 1)] - \exp[-0.50(A_N - 1)]}{2 \cosh[0.041(A_N - 1)]}; \quad (91)$$

方程与结合能数据相关系数为 0.9999, 曲线如图 5 所示。

仅在数值计算上, 由核素结合能趋势方程 (91) 式得当核子数 $A_N = 1000$ 时, 核素结合能 E_N 取最大值

$$E_{N_{\max}} = 3498.35 \text{ MeV}. \quad (92)$$

根据稳定核素中子数 N 与质子数 Z 之间的实验数据资料及趋势性方程^[10]

$$N = 192 \tan[0.007(Z - 1)],$$

其中方程曲线及与实验数据对比结果如图 6 所示; 即得在 $A_N = 1000$ 附近处可分解核子数时 E_N 理论最大值 $E_{N_{\max}}$ 及其所对应的核子数 A_{N_t} 、质子数 Z_t 及中子数 N_t 分别为 $E_{N_{\max}} = 3498.34 \text{ MeV}$, $A_{N_t} = 998$, $Z_t = 192$, $N_t = 806$ 。

核素结合能方程远景曲线及理论最大值位置如图 7 所示。

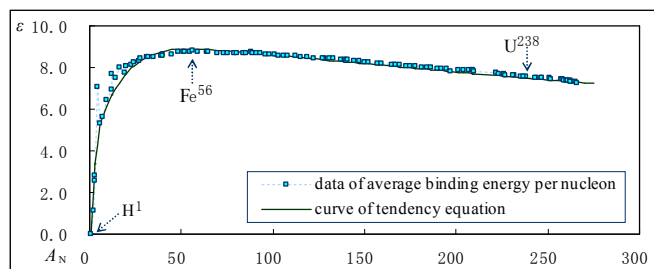


图 4 稳定核素比结合能趋势方程曲线图

Fig. 4 Curve figure of tendency equation of average binding energy per nucleon (or specific binding energy) of stable nuclide

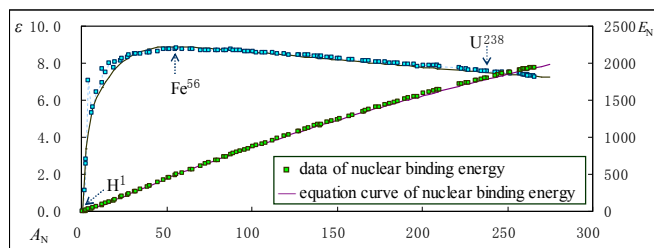


图 5 稳定核素结合能趋势方程曲线图

Fig. 5 Curve figure of tendency equation of stable nuclear binding energy

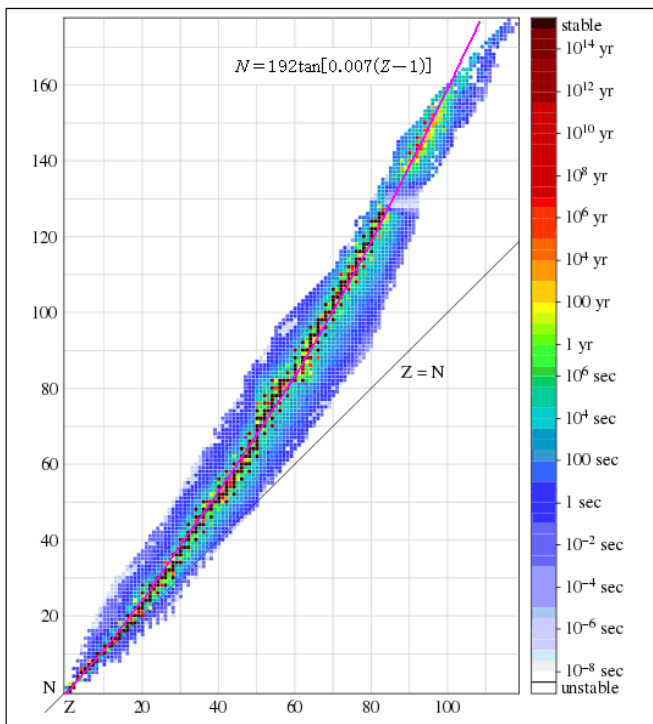


图 6 趋势方程线与稳定核素实验分布数据点的对比结果图^[10]

■ 稳定核素数据点 (from website of nndc.bnl.gov or en.wikipedia.org)
 - 趋势方程曲线 (from website of nature.ac.cn)

Fig.6 Comparison result figure between the curve of tendency equation and the experimental distribution data points of the stable nuclides^[10]

■ point of the stable nuclide data (from website of nndc.bnl.gov or en.wikipedia.org)
 - curve of tendency equation (from website of nature.ac.cn)

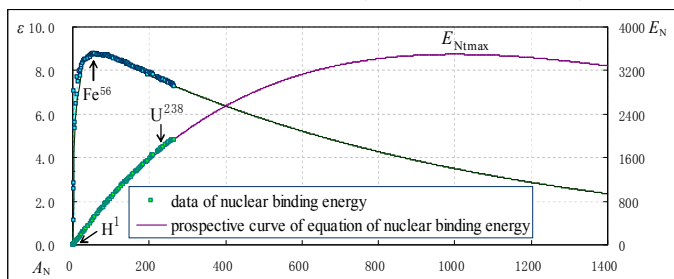


图 7 核素结合能趋势方程远景曲线及其理论最大值位置图

Fig.7 Prospective curve and its theoretical maximum position figure of tendency equation of the nuclear binding energy

2.2 势能函数曲线方程

2.2.1 一般性势能函数曲线方程

在自然现象中, 势能函数描述很重要, 基于级数方程 (58) 式, 得一类现象演化过程势能 U 随距离 r 变化的趋势性方程为

$$U = \phi_1 \left[1 + \phi_2 \frac{\sinh[\alpha_1(r-r_1)]}{\cosh[\alpha_2(r-r_1)]} + \phi_3 \frac{\sinh[\alpha_3(r-r_2)]}{\cosh[\alpha_4(r-r_2)]} \right], \quad (94)$$

这里 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 、 r_1 、 r_2 为待定常量。

方程 (94) 式及其复合函数的方程形式适于部分自然现象势能曲线整体趋势性描述及局部细节刻画分析。

当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 、 $\alpha_3 = \alpha_4$ 时, 得方程 (94) 式的一简化形式为方程 (95) 式, 其曲线如图 8 所示。

$$U = \phi_1 [1 + \phi_2 \tanh[\alpha_1(r-r_1)] + \phi_3 \tanh[\alpha_3(r-r_2)]] \quad (95)$$

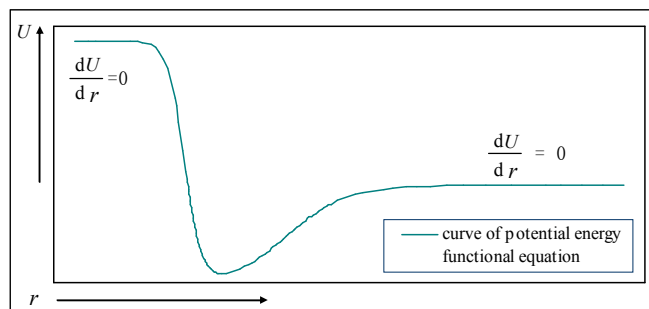


图 8 势能函数的方程曲线图

Fig. 8 Curve figure of potential energy functional equation

2.2.2 双原子分子势能函数曲线方程

双原子分子势能函数具有多种形式^[9, 11~13], 其中对于 $K_2-B^1\Pi_u$, 由方程 (95) 式得势能 U (cm^{-1}) 随核间距 r (nm) 变化的一趋势方程为 (96) 式, 曲线如图 9 所示, 图中 $K_2-B^1\Pi_u$ 的 RKR (Rydberg-Klein-Rees) 数据来自文献 [9] 的相关工作, 方程与数据的相关系数为 0.9923。

$$U = 2400[1.9 - 1.4 \tanh[15(r-0.31)] + \tanh[5(r-0.55)]] \quad (96)$$

这里平衡间距 $r_e \approx 0.5(r_1 + r_2) \approx 0.43 \text{ nm}$ 。

方程 (96) 式一简化的局部曲线方程为 (97) 式, 方程曲线如图 10 所示, 方程与数据的相关系数为 0.9992。

$$U = 2400[1.5 - \tanh[18(r-0.335)] + \tanh[5(r-0.55)]] \quad (97)$$

方程 (96)、(97) 二式仅是部分数据拟合的方程形式, 表明方程曲线的形态及趋势, 具体方程还需基于极端情况下的实验数据予以分析确定及计算验证。

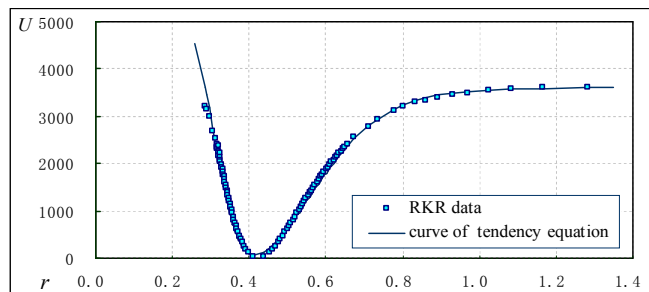


图 9 双原子分子势能函数的方程曲线图

Fig. 9 Curve figure of potential energy functional equation of diatomic molecule

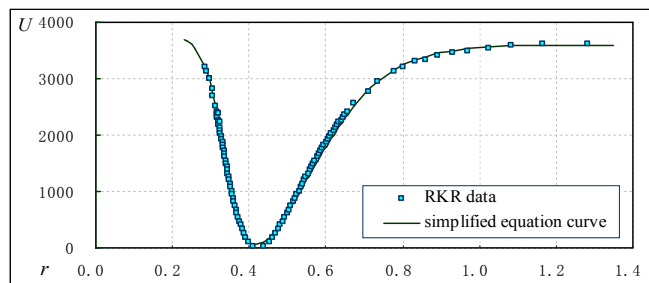


图 10 双原子分子势能函数的简化方程曲线图

Fig. 10 The curve figure of potential energy functional simplified equation of diatomic molecule

2.3 自然饱和过程

在科学技术中, 自然饱和过程是较普遍的演化现象, 诸如磁性材料饱和磁滞曲线、金属淬冷过程曲线、地震前后地温变化曲线、光电流与加速电压关系曲线、植物群落种数-面积曲线、血红蛋白氧饱和曲线、物理或化

学反应过程曲线、蝶阀流量—开度曲线、坝体浸润线、土体崩解过程曲线、地基强度增长曲线、弹坑尺寸—弹丸初速度曲线等。这类现象演化具有极限性、饱和性、相变或等效相变等特征，是开放系统进行多层次物质、能量、信息交换的动态平衡重构过程。万千气象诸念所幻，沙等世界各趋所适；其从一相对稳态演化到另一相对稳态的转变过程基本可由参量代换或直接依据方程（1）式的极限解（或饱和解）、波动解（或振荡解）、极限与波动复合解、近似等效解析解及诸解的复合函数等形式予以趋势性描述；其中依据方程（31）式予以趋势描述的部分自然饱和过程曲线如图 11 所示，其 18 种曲线即包含极限情况下方程（15）式中双曲正切函数或描述 S 型曲线的 Logistic 函数（19）式的 2 种曲线形态。

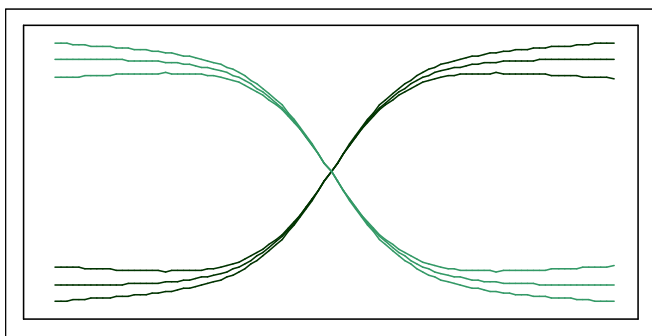


图 11 自然饱和过程趋势方程曲线图

Fig.11 Curves figure of tendency equations of the natural saturation process

一般现象演化在微过程含有小幅值振荡现象，在极限上至少存在一趋势参量乃至饱和参量，非线性科学研究主旨之一即是确定这些参量；而诸多自然饱和过程则是更高层次演化过程的局部构成环节或细化台阶。

下面以树木生长高度曲线、材料断裂韧性曲线为例，给出二个较为理想过程的趋势方程具体形式。

2.3.1 树木生长高度曲线方程

基于（15）式，得树木生长高度 H (m) 与时间 t (a) 的关系方程（98）式，曲线如图 12 所示，树木(紫果云杉)高度数据来自文献[14]，方程与数据相关系数 0.9993。

$$H = 22 + 22 \tanh[0.02(t - 97)] \quad (98)$$

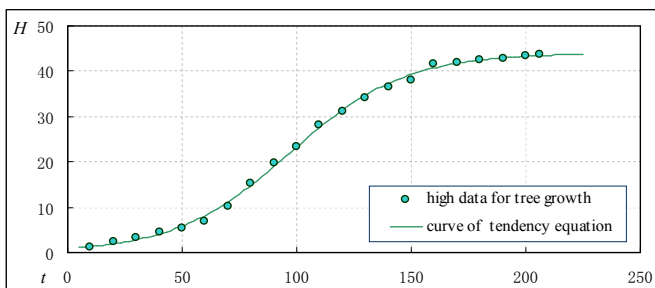


图 12 树木(紫果云杉)生长过程趋势方程曲线图

Fig. 12 Curve figure of tendency equation of the tree(Picea purpurea) growth process

2.3.2 材料断裂韧性曲线方程

基于方程（15）式，可得类如材料断裂韧性 K (MPam^{0.5}) 随屈服强度 σ_Y (MPa) 变化等的趋势方程（99）式，其曲线如图 13 所示，图中钢材材料 AISI4340 (40CrNiMo)断裂韧性的数据来自文献[15]。

$$K = 104 - 73 \tanh[0.005(\sigma_Y - 1250)] \quad (99)$$

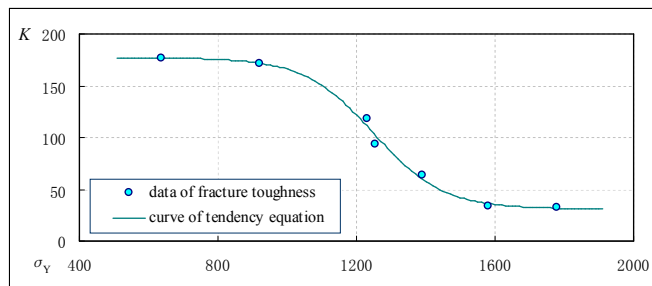


图 13 钢材材料断裂韧性趋势方程曲线图

Fig. 13 Curve figure of tendency equation of fracture toughness for steel material

2.4 蠕变过程

对于部分材料蠕变过程曲线、材料切削走刀抗力（或后刀面磨损宽度）—时间（或切削路程）曲线、石墨烯/单晶硅太阳能电池 I—V 特性曲线、疲劳裂纹扩展速率曲线等，可基于方程（31）式或方程（41）式予以趋势描述；这些曲线的特征是具有初期快速、中期线性平缓、末期急剧演化区域。整体上，正、负形曲线可由方程（1）式的近似等效解析解（31）式给出，在此，蠕变过程、饱和过程可由同一方程描述，皆为同类过程的不同形式表现。

对于金属或岩石部分典型蠕变过程曲线^[15-18]从材料开始变形、经线性拉伸到断裂点三阶段伸长率 λ 与时间 t 的关系，可用方程（31）式的 $\lambda(t)$ 形式予以趋势描述， $\lambda(t)$ 方程如下，该方程或其坐标置换方程曲线如图 14 所示。

$$\lambda = \lambda_0 + A_C \frac{\exp[\alpha_{C1}(t - t_0)] - \exp[-\alpha_{C2}(t - t_0)]}{2 \cosh[\alpha_{C3}(t - t_0)]} \quad (100)$$

这里 t_0 、 A_C 、 α_{C1} 、 α_{C2} 、 α_{C3} 为待定常量， $\lambda(t = t_0) = \lambda_0$ 。

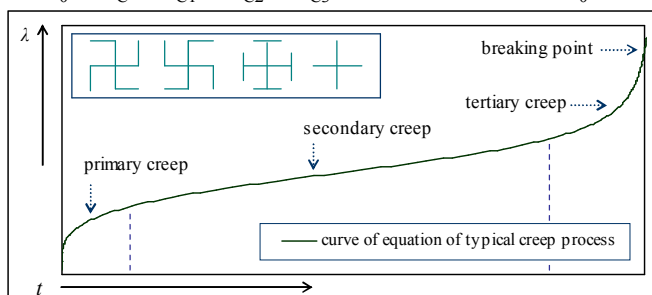


图 14 金属或岩石材料典型蠕变过程趋势方程曲线图

Fig. 14 Curve figure of tendency equation of typical creep process for metal or rock material

对于方程（100）式，取时间最大值 $t_{max} \geq t$ ，则当

$|\alpha_{C1}(t_{max} - t_0)| \ll 1$ 、 $|\alpha_{C3}(t_{max} - t_0)| \approx 0$ 时，方程形式即简化为

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + 0.5 A_C [1 + \alpha_{C1}(t - t_0)] - \exp[-\alpha_{C2}(t - t_0)] \\ &= \lambda_0 + 0.5 A_C [1 - \alpha_{C1} t_0 - \exp(\alpha_{C2} t_0)] \\ &\quad + 0.5 A_C \exp(\alpha_{C2} t_0) [1 - \exp(-\alpha_{C2} t)] + 0.5 A_C \alpha_{C1} t \quad (101) \end{aligned}$$

此与诸如改进的 Nishihara 模型等方程解^[16]具有相同形式，得（100）式中诸系数与力学参数间一组对应关系为 $\lambda_0 + 0.5 A_C [1 - \alpha_{C1} t_0 - \exp(\alpha_{C2} t_0)] = \sigma_C E_1^{-1}$ ， $\alpha_{C2} = E_2 \eta_{m1}^{-1}$ ， $0.5 A_C \exp(\alpha_{C2} t_0) = \sigma_C E_2^{-1}$ ， $0.5 A_C \alpha_{C1} = [\sigma_C - \sigma_S] \eta_{m2}^{-1}$ ；（102）这里 E_1 为弹性模量， E_2 为黏弹性模量， η_{m1} 、 η_{m2} 为黏性系数， σ_C 为材料所受常应力， σ_S 为材料长期强度， $\sigma_C > \sigma_S$ 。

树木生长的饱和过程与材料受力的蠕变过程是同类型数学方程的不同表现形式，树木的枝叶扩散与材料的裂纹扩展具有相近的分维（分形）曲线形态。

3 自适应连接方程参数计算的预置迭代方法

连接方程 (31) 式及映射方程 (42) 式~ (45) 式, 是以逻辑解析为内核的普适构造方法建立的。

数学的逻辑解析和普适构造, 与生物学的遗传和变异相当。在相邻层面, 普适构造以逻辑解析为内核, 构造过程框架新远兼顾继承; 逻辑解析以普适构造为本底, 解析过程脉络严谨兼顾开拓, 如此既可避免普适构造的随意性, 又可使得逻辑解析具有灵活的开放适应性, 保证数学理论框架体系相对自洽、适时突破、转折跃进。

下面从连接方程 (31) 式的构造特征方程 (20) 式~ (36) 式开始, 给出数据曲线间断区域自适应连接方程中参数确定的预置迭代计算方法, 其尤适于饱和和过程曲线的自适应连接。对于较复杂的曲线间断区域, 包括位错间断、回转间断等, 可依据映射方程 (42) 式~ (45) 式予其虚拟端点分段连接、端点数据段平移或旋转等方式计算; 对于部分蠕变过程及方程 (41)、(45) 式的形式, 亦可参照计算。

3.1 自适应连接方程在三个局部区域的线性形式

根据连接方程 (31) 式

$$y = y_0 + A \frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{2 \cosh[\alpha_3(x-x_0)]},$$

其一等效形式为

$$y = y_0 + A \exp[-\alpha_3(x-x_0)] \times \frac{\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]}{1 + \exp[-2\alpha_3(x-x_0)]};$$

则在 $x < x_0$ 区域, 当 $\exp[-2\alpha_3(x-x_0)] \gg 1$ 时, 得

$$y \approx y_0 + A \exp[-\alpha_3(x-x_0)] \times [\exp[\alpha_1(x-x_0)] - \exp[-\alpha_2(x-x_0)]] \times \exp[2\alpha_3(x-x_0)] = y_0 - A \exp[(\alpha_3 - \alpha_2)(x-x_0)] + A \exp[(\alpha_1 + \alpha_3)(x-x_0)]; \quad (103)$$

进而在 $x \ll x_0$ 区域, 当 $\exp[(\alpha_1 + \alpha_3)(x-x_0)] \ll 1$ 时, 得方程 (31) 式的局部区域方程及其斜率 η_1 方程分别为

$$y = y_0 - A \exp[(\alpha_3 - \alpha_2)(x-x_0)], \quad (104)$$

$$\eta_1 = -A(\alpha_3 - \alpha_2) \exp[(\alpha_3 - \alpha_2)(x-x_0)]; \quad (105)$$

在极限状态, 当 $\text{abs}[(\alpha_3 - \alpha_2)(x-x_0)] \ll 1$ 时, 由方程 (104)、(105) 二式得方程 (31) 式在 $x \ll x_0$ 区域的局部线性方程形式及其斜率分别为

$$y = y_0 - A - A(\alpha_3 - \alpha_2)(x-x_0), \quad (106)$$

$$\eta_1 = -A(\alpha_3 - \alpha_2)。 \quad (107)$$

在平衡点 $x \approx x_0$ 邻近区域, 当

$$\max[\text{abs}[\alpha_1(x-x_0), \alpha_2(x-x_0), \alpha_3(x-x_0)]] \ll 1$$

时, 则方程 (31) 式在 $x \approx x_0$ 邻近区域的线性方程形式及其斜率 η_2 分别为

$$y \approx y_0 + A \frac{[1 + \alpha_1(x-x_0)] - [1 - \alpha_2(x-x_0)]}{[1 + \alpha_3(x-x_0)] + [1 - \alpha_3(x-x_0)]} = y_0 + 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2)(x-x_0), \quad (108)$$

$$\eta_2 = 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2)。 \quad (109)$$

根据方程 (31) 式, 其另一等效形式为

$$y = y_0 + A \exp[(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)] \times \frac{1 - \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(x-x_0)]}{1 + \exp[-2\alpha_3(x-x_0)]};$$

则在 $x > x_0$ 区域, 当 $\exp[-2\alpha_3(x-x_0)] \ll 1$ 时, 得连接方程 (31) 式的局部区域近似形式为

$$y \approx y_0 + A \exp[(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)] \times [1 - \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(x-x_0)]] \times [1 - \exp[-2\alpha_3(x-x_0)]] = y_0 + A \exp[(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)] \times [1 - \exp[-2\alpha_3(x-x_0)] - \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(x-x_0)] + \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)(x-x_0)]]。 \quad (110)$$

进一步地, 在 $x \gg x_0$ 区域, 当

$$\exp[-(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)(x-x_0)] \ll 1$$

时, 方程 (110) 式成为

$$y = y_0 + A \exp[(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)] \times [1 - \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(x-x_0)] - \exp[-2\alpha_3(x-x_0)]]; \quad (111)$$

当

$$\exp[-(\alpha_1 + \alpha_2)(x-x_0)] \ll 1,$$

$$\exp[-2\alpha_3(x-x_0)] \ll 1$$

时, 由方程 (111) 式得方程 (31) 式的局部方程形式及其斜率 η_3 分别为

$$y = y_0 + A \exp[(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)], \quad (112)$$

$$\eta_3 = A(\alpha_1 - \alpha_3) \exp[(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)]; \quad (113)$$

继而在极限状态, 当

$$\text{abs}[(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0)] \ll 1$$

时, 由方程 (112)、(113) 式即得方程 (31) 式在 $x \gg x_0$ 区域的局部线性方程形式及其斜率分别为

$$y = y_0 + A + A(\alpha_1 - \alpha_3)(x-x_0), \quad (114)$$

$$\eta_3 = A(\alpha_1 - \alpha_3)。 \quad (115)$$

3.2 自适应连接方程参数计算的预置迭代方法

根据数据曲线间断区域性质及方程 (31) 式的三个线性方程 (104)~(107) 式、(114)、(115) 式, 得方程组

$$\begin{cases} k_S = \eta_1 = -A(\alpha_3 - \alpha_2) \exp[(\alpha_3 - \alpha_2)(x_S - x_0)], \\ \rho k_{SE} = \eta_2 = 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2), \\ k_E = \eta_3 = A(\alpha_1 - \alpha_3) \exp[(\alpha_1 - \alpha_3)(x_E - x_0)]; \end{cases} \quad (116)$$

$$\begin{cases} k_S = \eta_1 = -A(\alpha_3 - \alpha_2), \\ \rho k_{SE} = \eta_2 = 0.5A(\alpha_1 + \alpha_2), \\ k_E = \eta_3 = A(\alpha_1 - \alpha_3); \end{cases} \quad (117)$$

式中 ρ 为连接方程曲线在平衡点附近区域的斜率倍数。

ρ 值一般可取在 0.5~3.0 之间; 其中对于缓变数据曲线阶跃间断区域, $\rho = 1.5 \sim 2.5$; 而当 k_S 、 k_{SE} 、 k_E 三个斜率值接近时, $\rho = 1.0$ 。与方程 (116) 式比较, 方程 (117) 式适于缓慢变化情况。

当拟合连续区域, 由始点以右点、终点以左点之间的连线、或对阶跃折线进行光滑处理时, ρk_{SE} 等于连线在平衡点局部区域趋势变化的平均斜率。

根据方程 (104) 及 (105) 式、方程 (112) 及 (113)、(116) 式, 可预置

$$\begin{aligned} x_0 &= g_1(x_S + x_E), \\ y_{0pv} &= g_2(y_S + y_E); \end{aligned}$$

得

$$\begin{cases} \alpha_3 - \alpha_2 = k_S(y_S - y_{0pv})^{-1}, \\ \alpha_1 - \alpha_3 = k_E(y_E - y_{0pv})^{-1}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2\rho k_{SE} A^{-1}; \end{cases} \quad (118)$$

将上式中的前二式分别代入方程 (104)、(112) 二式得

$$\begin{cases} y_S = y_0 - A\xi_S, \\ y_E = y_0 + A\xi_E; \end{cases} \quad (119)$$

式中

$$\begin{aligned} \xi_S &= \exp[k_S(x_S - x_0)(y_S - y_{0pv})^{-1}], \\ \xi_E &= \exp[k_E(x_E - x_0)(y_E - y_{0pv})^{-1}]. \end{aligned}$$

可解得 y_0 及 A 的初始试算值分别为

$$\begin{cases} y_{0p0} = y_S + \xi_S(y_E - y_S)(\xi_E + \xi_S)^{-1}, \\ A_{p0} = (y_E - y_S)(\xi_E + \xi_S)^{-1}. \end{cases} \quad (120)$$

将方程 (120) 式中 y_{0p0} 及 A_{p0} 作为 y_{0pv} 及 A 代入到方程 (118) 式中, 即解得 α_1 、 α_2 、 α_3 的第一次试算值分别为

$$\begin{cases} \alpha_{1p1} = \rho k_{SE} A_{p0}^{-1} + 0.5[R_E + R_S], \\ \alpha_{2p1} = \rho k_{SE} A_{p0}^{-1} - 0.5[R_E + R_S], \\ \alpha_{3p1} = \rho k_{SE} A_{p0}^{-1} - 0.5[R_E - R_S], \end{cases} \quad (121)$$

式中 $R_E = k_E(y_E - y_{0p0})^{-1}$, $R_S = k_S(y_S - y_{0p0})^{-1}$ 。

对于缓慢变化曲线, 由方程 (106)、(114)、(117) 三式, 可直接预置

$$x_0 = g_1(x_S + x_E),$$

不需再预置 y_{0pv} ; 得

$$\begin{cases} y_S = y_0 - A + k_S(x_S - x_0), \\ y_E = y_0 + A + k_E(x_E - x_0); \end{cases} \quad (122)$$

故解得 y_0 及 A 的初始试算值为

$$\begin{cases} y_{0p0} = 0.5[[y_E - k_E(x_E - x_0)] + [y_S - k_S(x_S - x_0)]], \\ A_{p0} = 0.5[[y_E - k_E(x_E - x_0)] - [y_S - k_S(x_S - x_0)]]. \end{cases} \quad (123)$$

将方程 (123) 式的 A_{p0} 作为 A 代入到方程 (117) 式中, 解得 α_1 、 α_2 、 α_3 的第一次试算值分别为

$$\begin{cases} \alpha_{1p1} = 0.5A_{p0}^{-1}[2\rho k_{SE} - k_S + k_E], \\ \alpha_{2p1} = 0.5A_{p0}^{-1}[2\rho k_{SE} + k_S - k_E], \\ \alpha_{3p1} = 0.5A_{p0}^{-1}[2\rho k_{SE} - k_S - k_E]. \end{cases} \quad (124)$$

在始点 $P_S(x_S, y_S)$ 及终点 $P_E(x_E, y_E)$ 位置, 根据连接方程 (31) 式及 (118) 式或缓慢变化曲线时的方程 (124) 式得

$$y_S = y_0 + A\varphi_S, \quad (125)$$

$$y_E = y_0 + A\varphi_E; \quad (126)$$

式中

$$\begin{aligned} \varphi_S &= \frac{\exp[\alpha_{1p1}(x_S - x_0)] - \exp[-\alpha_{2p1}(x_S - x_0)]}{2 \cosh[\alpha_{3p1}(x_S - x_0)]}, \\ \varphi_E &= \frac{\exp[\alpha_{1p1}(x_E - x_0)] - \exp[-\alpha_{2p1}(x_E - x_0)]}{2 \cosh[\alpha_{3p1}(x_E - x_0)]}. \end{aligned}$$

可解得 y_0 及 A 的第一次试算值分别为

$$\begin{cases} y_{0p1} = [y_E\varphi_S - y_S\varphi_E][\varphi_E - \varphi_S]^{-1}, \\ A_{p1} = [y_E - y_S][\varphi_E - \varphi_S]^{-1}. \end{cases} \quad (127)$$

将方程 (127) 式的 y_{0p1} 及 A_{p1} 作为 y_{0p0} 及 A_{p0} 代入到方程 (121) 式或缓慢变化曲线时的 (124) 式, 再运算到 (127) 式, 得第二次试算参数值; 如此迭代运算 J 次后, 得诸参数 α_{1pJ} 、 α_{2pJ} 、 α_{3pJ} 、 y_{0pJ} 、 A_{pJ} , 即得数据曲线间断区域自适应连接方程 (31) 式的具体形式。

当 $k_S + k_E \neq 0$ 时, 可直接取

$$y_{0p0} = g_2[y_S + y_E]$$

作为初始试算值, 有

$$x_{0p1} = [2y_{0p0} + k_S x_S + k_E x_E - y_S - y_E][k_S + k_E]^{-1}. \quad (128)$$

当 $k_S + k_E = 0$ 且 $k_S \neq 0$ 时, 可取

$$A_{p0} = g_3[y_E - y_S]$$

为初始试算值, 有

$$x_{0p1} = 0.5[y_E - y_S - 2A_{p0} + k_S(x_S + x_E)]k_S^{-1}. \quad (129)$$

当 $k_S = k_E = 0$ 时, 由方程 (120)、(121) 或 (123)、(124) 式可直接得到 (31) 式的特殊形式双曲正切方程

$$y = y_0 + A \tanh[\alpha(x - x_0)], \quad x_0 = 0.5[x_S + x_E]$$

此式中

$$A_{p0} = 0.5[y_E - y_S], \quad \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \rho k_{SE} A_{p0}^{-1},$$

$$\varphi_S = \tanh[\alpha(x_S - x_0)], \quad \varphi_E = \tanh[\alpha(x_E - x_0)],$$

$$\varphi_S = -\varphi_E, \quad y_0 = 0.5[y_S + y_E], \quad A = 0.5[y_E - y_S]\varphi_E^{-1}.$$

将方程 (128) 式 x_{0p1} 作为初始试算值, 或调节 g_1 、 g_2 改变 (31) 式预置平衡点 (x_{0pv}, y_{0pv}) 位置, 及以连接

曲线路径长度作为约束条件, 可得到更好的连接曲线形态。当以 k_S 和 k_E 代替 $P_S(x_S, y_S)$ 和 $P_E(x_E, y_E)$ 作为试算值主指标时, 会减少连接曲线在延伸段与原曲线的偏差。

对部分现象, 当待定参量数目略大于条件数目时, 可经预置迭代方法自适应求解, 融合毛估与准确为一体。

在计算中, 需比较连接方程在 J 次与 $J+1$ 次或在起始点 η_1 与 k_S 及结束点 η_3 与 k_E 的相对误差。其中对于数据曲线阶跃间断区域, 在 $J=1$ 时得到的自适应连接方程即可基本满足连接要求, 一次试算确定方程具体形式。

4 自适应连接方程实例计算

图 15 所示二段数据曲线间断区域, 坐标数据分别为: 始点 $P_a(30, 6.0)$, 左邻域一点 $P_{a-}(27, 6.6)$; 终点 $P_b(50, 21.40)$, 右邻域一点 $P_{b+}(53, 21.88)$; 始点 $P_c(70, 24.60)$, 左邻域一点 $P_{c-}(67, 24.12)$; 终点 $P_d(85, 9.55)$, 右邻域一点 $P_{d+}(88, 10.12)$ 。运算过程直接取

$$x_0 = 0.5[x_S + x_E], \quad J = 1, \quad \rho = 2.5。$$

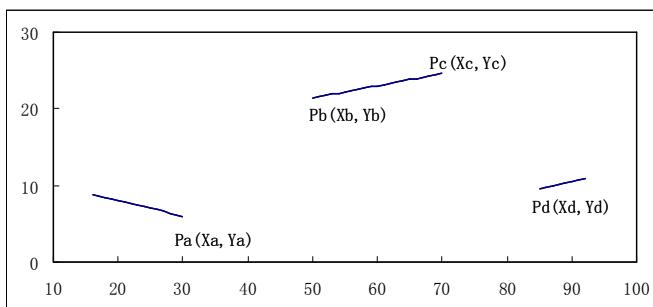


图 15 数据曲线间断区域图

Fig. 15 Figure of discontinuous areas in data curve

在 $P_a \sim P_b$ 间断区域, 依据曲线间断区域性质得

$$k_S = -0.20, \quad k_E = 0.16, \quad k_{SE} = 0.77, \quad x_0 = 40;$$

其属于缓慢变化曲线, 可直接根据方程 (123)、(124)、(127) 式依次求得

$$y_{0p0} = 11.90, \quad A_{p0} = 7.90;$$

$$\alpha_{1p1} = 0.2665, \quad \alpha_{2p1} = 0.2209, \quad \alpha_{3p1} = 0.2462;$$

$$y_{0p1} = 11.9754, \quad A_{p1} = 7.8125;$$

即得在 $P_a \sim P_b$ 间断区域的自适应连接方程为

$$y = 11.9754 + 7.8125$$

$$\times \frac{\exp[0.2665(x-40)] - \exp[-0.2209(x-40)]}{2 \cosh[0.2462(x-40)]}。$$

(130)

同样计算得在 $P_c \sim P_d$ 间断区域的自适应连接方程为

$$y = 16.9792 - 8.9476$$

$$\times \frac{\exp[0.2821(x-77.5)] - \exp[-0.2855(x-77.5)]}{2 \cosh[0.3036(x-77.5)]}。$$

(131)

当由方程 (120)、(121)、(127) 式计算 $P_a \sim P_b$ 间断区域时, 预置 $y_{0pv} = 0.5(y_S + y_E)$, 即得方程 (31) 式中

诸参量

$$y_{0p0} = 11.8308, \quad A_{p0} = 7.5991;$$

$$\alpha_{1p1} = 0.2736, \quad \alpha_{2p1} = 0.2231, \quad \alpha_{3p1} = 0.2574;$$

$$y_{0p1} = 11.6837, \quad A_{p1} = 8.1124;$$

方程 (31) 式的具体形式为

$$y = 11.6837 - 8.1124 \times \frac{\exp[0.2736(x-40)] - \exp[-0.2231(x-40)]}{2 \cosh[0.2574(x-40)]}。$$

(132)

连接方程 (130)、(131) 二式在数据曲线间断区域的自适应连接曲线 (红色) 如图 16 所示。

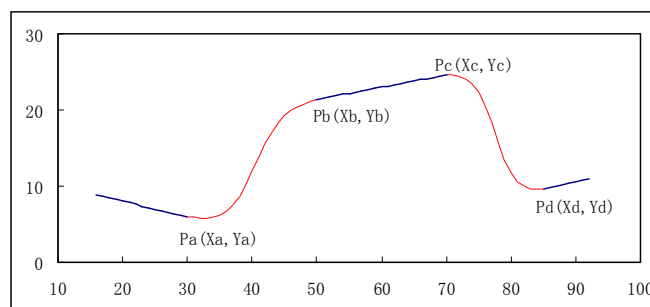


图 16 数据间断区域自适应连接方程曲线图

— 数据段曲线 — 连接方程曲线

Fig. 16 Curves figure of adaptive connection equations in discontinuous areas of data

— curves of data segments — curves of adaptive connection equations

当运算取 $J=3$ 时, 根据方程 (123)、(124)、(127) 式得在 $P_a \sim P_b$ 之间的间断区域自适应连接方程具体形式

$$y = 11.9546 + 7.8030 \times \frac{\exp[0.2698(x-40)] - \exp[-0.2236(x-40)]}{2 \cosh[0.2493(x-40)]};$$

(133)

其曲线如图 17 所示; 表明 $J=3$ 时曲线 (绿色) 与 $J=1$ 时曲线 (红色) 基本重合, 相对误差绝对值小于 0.7%。

对 $y_E > y_S$ 与 $y_E < y_S$ 情况, 可预置 x_{0pv} 、 y_{0pv} 分别偏向 k_S 和 k_E 中低值与高值的曲线端, 以获得较好曲线形态。

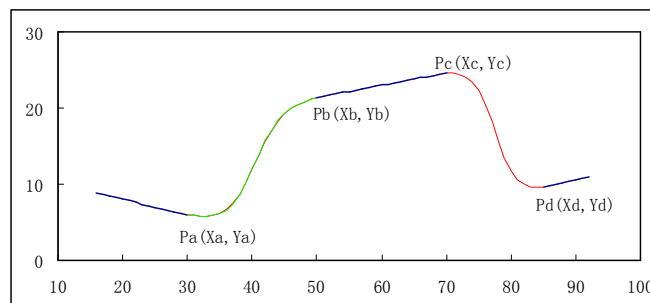


图 17 P_a 到 P_b 间断区域自适应连接方程曲线对比图

— 方程曲线 ($J=1$) — 方程曲线 ($J=3$)

Fig. 17 Comparison result figure of curves between adaptive connection equations when $J=1$ and $J=3$ in discontinuous area from points P_a to P_b

— curve of the equation when $J=1$ which covered by curve when $J=3$ — curve of the equation when $J=3$

上述分析计算给出了数据曲线间断区域的自适应连接方程及其曲线特征；数据曲线间断区域的端点呈现前后序列分布，依据方程（31）式可进行自适应连接分析。

下面仍以方程（31）式为基础，依据映射方程方法（42）~（44）式，给出一般曲线在位错间断、回转弯断时的连接方程形式及其曲线形态特征。

图 18 中所示的位错间断区域，坐标数据分别为：始点 $P_a(53.0, 6.0)$ ，左邻域一点 $P_{a-}(50.0, 5.4)$ ；终点 $P_b(50.0, 21.4)$ ，右邻域一点 $P_{b+}(54.0, 22.0)$ 。

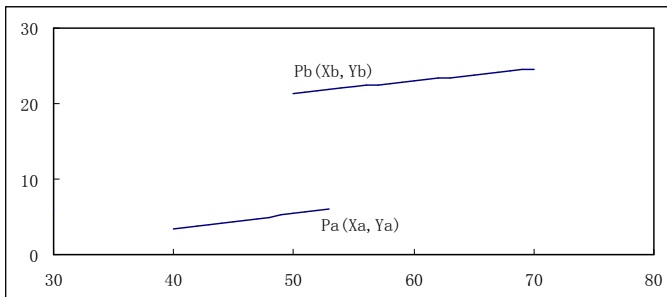


图 18 曲线位错间断区域图

Fig. 18 Figure of discontinuous area with the dislocation of curve

将 P_a 段曲线向左平移生成 P_c 段曲线， P_c 点坐标 $x_c < x_b$ 、 $y_c = y_a$ ，这里 $P_c(30.0, 6.0)$ ，取左邻域一点 $P_{c-}(27.0, 5.4)$ ；其如图 19 所示；由方程（31）式得新的间断区域 P_c 与 P_b 之间自适应连接方程（42）式具体形式 $y = 13.9609 + 5.7240$

$$\times \frac{\exp[0.2837(x-40)] - \exp[-0.2905(x-40)]}{2 \cosh[0.2566(x-40)]} \quad (134)$$

自适应连接方程（134）式曲线如图 20 所示。

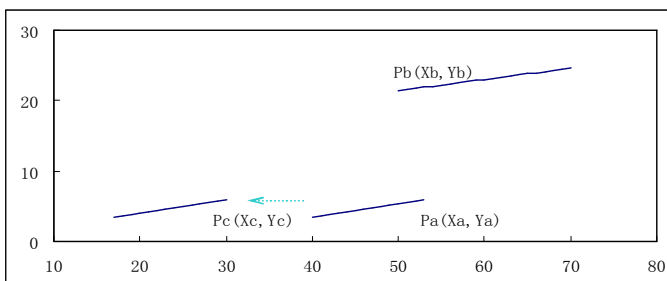


图 19 向左平移 P_a 段曲线生成 P_c 段曲线的间断区域图

Fig. 19 Figure of discontinuous area of the curve of P_c data segment generated by the translation of P_a data segment to the left

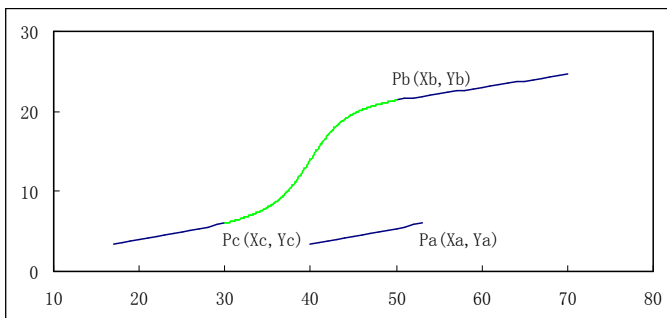


图 20 P_c 到 P_b 间断区域自适应连接方程曲线图

— P_c 与 P_b 之间方程曲线

Fig. 20 Curves figure of adaptive connection equation in discontinuous area from points P_c to P_b

— curve of equation in discontinuous area from points P_c to P_b

由图 18 中位错间断特征，可得映射方程一简洁形式为

$$x = 0.5[x_a + x_b] + x_\tau \sin[\omega_\tau[\tau - 0.5(x_c + x_b)]] \quad (135)$$

式中 τ 取值 $x_c \leq \tau \leq x_b$ ；待定系数 x_τ 、 ω_τ 间关系为

$$\begin{cases} \omega_\tau[x_a - x_c] = 2\pi, \\ x_\tau \sin[\omega_\tau[0.5(x_c - x_b)]] = 0.5[x_a - x_b]; \end{cases} \quad (136)$$

解得系数

$$\omega_\tau = 0.2732, \quad x_\tau = 3.765;$$

方程（135）式为

$$x = 51.5 - 3.765 \sin[0.2732(\tau - 40)]. \quad (137)$$

由（134）、（137）二式即得映射方程组（44）式形式

$$\begin{cases} y = 13.9609 + 5.7240 \\ \times \frac{\exp[0.2837(\tau - 40)] - \exp[-0.2905(\tau - 40)]}{2 \cosh[0.2566(\tau - 40)]}, \\ x = 51.5 - 3.765 \sin[0.2732(\tau - 40)]. \end{cases} \quad (138)$$

通过映射方程组（138）式将 P_c 与 P_b 之间的自适应连接曲线映射到 P_a 与 P_b 之间的位错间断区域，曲线如图 21 所示。

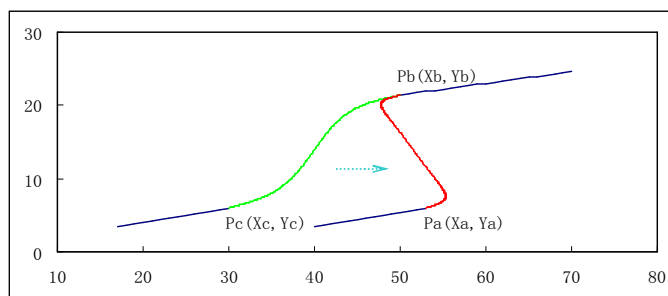


图 21 间断区域的映射方程连接曲线图

— P_c 与 P_b 之间方程曲线 — P_a 与 P_b 之间方程曲线

Fig. 21 Curve figure of mapping equation between two connecting curves in the discontinuous areas

— curve of equation in discontinuous area from points P_c to P_b

— curve of equation in discontinuous area from points P_a to P_b

将图 21 中的 P_c 段曲线及其与 P_b 之间的自适应连接方程曲线去除，即得图 18 中的位错间断区域 P_a 与 P_b 之间的连接方程（138）式曲线如图 22 所示。

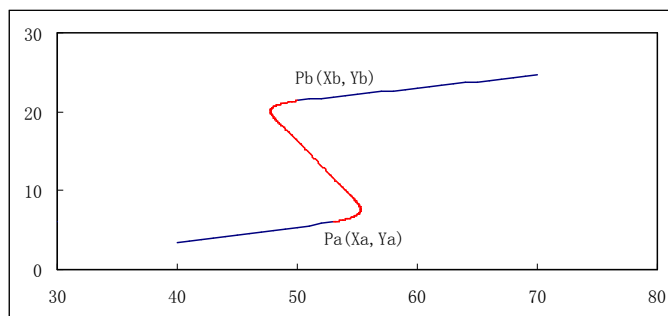


图 22 位错间断区域连接方程曲线图

— 数据段曲线 — 连接方程曲线

Fig. 22 Curve figure of connection equation in discontinuous area with the dislocation of the curve

— curve of data segments — curve of connection equation

下面图 23 所示的曲线间断区域为回转间断区域, 端点坐标数据分别为:

始点 $P_a(30.0, 7.20)$, 左邻域一点 $P_a(27.0, 6.84)$;
 终点 $P_b(24.0, 21.48)$, 左邻域一点 $P_b(21.0, 21.87)$ 。

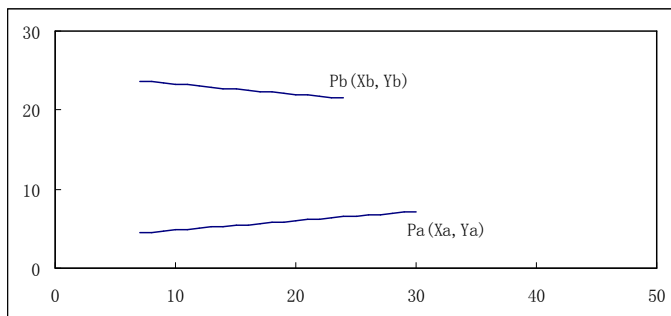


图 23 曲线回转间断区域图

Fig. 23 Figure of discontinuous area with the turn-back in curve

与图 19 所示的位错间断区域性质类似, 图 23 所示的回转间断区域亦不能直接应用方程 (31) 式进行自适应连接描述, 需要将其一个端点开始的数据段或二个端点的数据段进行移动, 生成新的端点前后次序排列的间断区域, 再依据方程 (42) 式、映射方程 (43) 式及 (44) 式得到回转间断区域的连接曲线。

在回转间断区域图 23 中, 因 $x_a > x_b$, 故可考虑将 P_b 段曲线以 $x = x_a = 30.0$ 为轴线向右旋转对称生成以 P_c 为端点的对称曲线, 使得端点 P_c 的坐标 $x_c > x_a$ 、 $y_c = y_b$; 这里端点 $P_c(36.0, 21.48)$, 在新生成的 P_a 与 P_c 之间的间断区域, 有

$$x_{m0} = 0.5(x_a + x_c) = 33;$$

并取端点 P_c 右邻域一点 $P_{c+}(39.0, 21.87)$; 旋转之后生成的间断区域如图 24 所示。

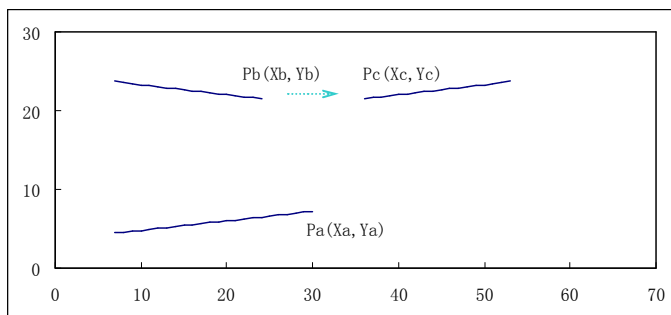


图 24 P_b 段曲线向右旋转生成 P_c 段曲线的间断区域图

Fig. 24 Figure of discontinuous area of the curve of P_c data segment generated by rotating the curve of P_b data segment to the right

由方程 (31) 式得新闻断区域 P_a 与 P_c 之间的自适应连接方程 (42) 式的具体形式为

$$y = 14.3217 + 6.7490 \times \frac{\exp[0.9399(x - 33)] - \exp[-0.9349(x - 33)]}{2 \cosh[0.9144(x - 33)]}; \quad (139)$$

连接方程 (139) 式的曲线如图 25 所示。

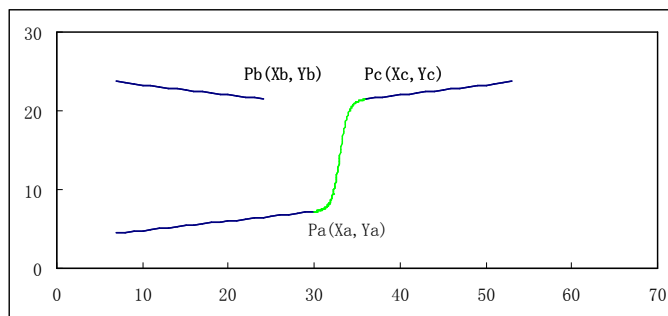


图 25 P_a 到 P_c 间断区域自适应连接方程曲线图

— P_a 与 P_c 之间方程曲线

Fig. 25 Curves figure of adaptive connection equation in discontinuous area from points P_a to P_c

— curve of equation in discontinuous area from points P_a to P_c

依据图 23 所示的回转间断区域特征, 可得到相应的映射方程 (44) 式多种表述, 其一简洁的多项式形式即为

$$x = \mu_{\tau 2} \tau^2 + \mu_{\tau 1} \tau + \mu_{\tau 0}; \quad (140)$$

式中 τ 取值 $x_a \leq \tau \leq x_c$; 方程 (140) 式中诸系数 $\mu_{\tau 0}$ 、 $\mu_{\tau 1}$ 、 $\mu_{\tau 2}$ 之间的关系方程为

$$\begin{cases} x_a^2 \mu_{\tau 2} + x_a \mu_{\tau 1} + \mu_{\tau 0} = x_a, \\ x_c^2 \mu_{\tau 2} + x_c \mu_{\tau 1} + \mu_{\tau 0} = x_b, \\ x_{m0}^2 \mu_{\tau 2} + x_{m0} \mu_{\tau 1} + \mu_{\tau 0} = x_a + \rho_{\tau} (x_{m0} - x_a); \end{cases} \quad (141)$$

这里 $0 \leq \rho_{\tau} \leq 1$ 为系数; 取 $\rho_{\tau} = 0.36$ 时, 得方程 (138) 式的具体形式为

$$x = -0.4533\tau^2 + 28.92\tau - 429.60. \quad (142)$$

由方程 (139)、(142) 二式即得映射方程组 (44) 式形式

$$\begin{cases} y = 14.3217 + 6.7490 \\ \times \frac{\exp[0.9366(\tau - 33)] - \exp[-0.9349(\tau - 33)]}{2 \cosh[0.9144(\tau - 33)]}, \\ x = -0.4533\tau^2 + 28.92\tau - 429.60. \end{cases} \quad (143)$$

通过映射方程组 (143) 式将 P_a 与 P_c 之间的连接曲线映射到回转间断区域 P_a 与 P_b 之间, 曲线如图 26 所示。

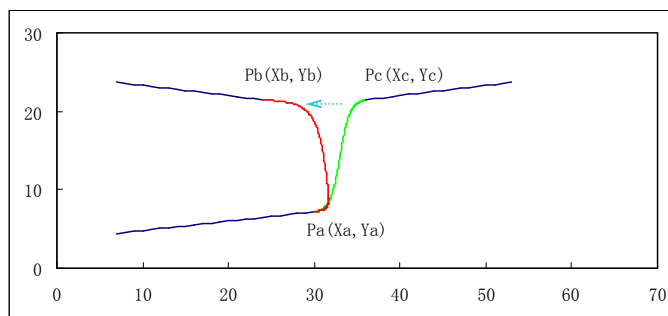


图 26 间断区域的映射方程连接曲线图

— P_a 与 P_c 之间方程曲线 — P_a 与 P_b 之间方程曲线

Fig. 26 Curve figure of mapping equation between two connecting curves in the discontinuous areas

— curve of equation in discontinuous area from points P_a to P_c

— curve of equation in discontinuous area from points P_a to P_b

将图 26 中的 P_c 段曲线及 P_a 与 P_c 之间的连接方程曲线去除, 即得图 23 中的回转间断区域 P_a 与 P_b 之间的

连接方程 (143) 式曲线如图 27 所示。

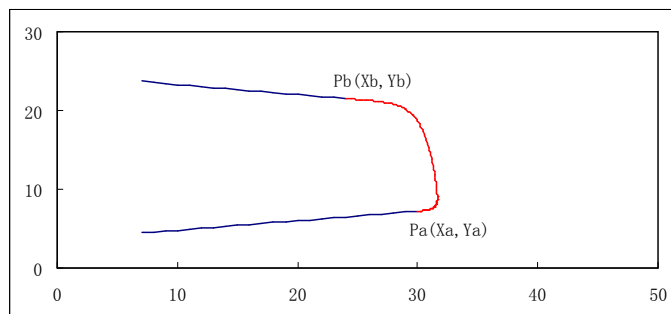


图 27 回转间断区域连接方程曲线图

— 数据段曲线 — 连接方程曲线

Fig. 27 Curve figure of connection equation in discontinuous area with the turn-back of the curve

— curve of data segments — curve of connection equation

以数据曲线间断区域的自适应连接方程 (31) 式为基础, 对一般曲线间断区域一个端点或二个端点数据段进行平移或旋转操作, 生成新端点先后序列的间断区域, 即可根据映射方程方法 (42) ~ (45) 式, 对较为广泛的曲线间断区域或等效间断区域予以趋势性连接描述, 为多维空间数据组间断区域的光滑连接提供运算基础。

5 结论

本文通过对非线性动力学方程近似等效解析解及数据曲线间断区域性质的分析, 给出了自适应连接方程的构造形式及其参数确定的预置迭代计算方法, 进而给出一般曲线间断区域的映射方程组连接方法, 实例计算表明连接效果很好, 对饱和过程及蠕变过程的趋势描述、位错间断及回转间断的映射连接等都有较好的适应性; 提出了现象演化状态间转变方程, 其一般遵循最优或最简洁路径光滑曲线方程的原则; 文中给出并分析了非线性 Newton 动力学方程、非线性 RLCNG 串联电路方程、数据曲线或部分连续函数的扩展型双曲正切级数及自然演化平衡法则、粒子统计分布的平均能量方程扩展形式及平均粒子数趋势性微分方程、稳定核素比结合能方程、核素结合能的理论最大值及相应质子数等相关内容。

本文给出的分析计算及预置迭代方法虽然较为简洁, 但仍有其局限性, 仅供自然科学及工程技术中数据曲线间断区域或等效间断区域的自适应连接、时间序列与饱和及蠕变过程非线性动力学方程近似等效解析解分析及拟合或连接方程形式构造、趋势性极限与细节波动复合过程描述、数据主曲线优化与回归分析相融合、曲线缺失数据的趋势性填充、数据库中部分参量间的关联性探索等方向深入研究时参考。

对非线性动力学方程及其近似等效解析解的深入分析表明, 未来宜建立一套与现有 Newton 微积分理论并行的数学理论框架, 在 Newton 微积分理论中没有解析解的演化方程描述, 部分地在新的理论中方程直接有解析解, 实现多层次开放式的激励、演化、守恒方程阐释, 虽然在根本上新理论仍是近似性、趋势性及过渡性的体系。

参考文献 (References):

[1] 阎坤. 60年来大气中二氧化碳浓度数据的趋势方程研究[J]. 地球物理学进展, 2009, 24(5):1665~1670.
YAN Kun. Research on tendency equation about the concentration data of carbon dioxide in the atmosphere over the past 60 years[J]. Progress in Geophys(in Chinese), 2009,24(5):1665~1670.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/co2concentration-pdf.pdf>

[2] 朱春钢, 王仁宏. 空间曲线几何Hermite插值的B样条方法[J]. 软件学报, 2005, 16 (04) :634~642.
ZHU Chun-gang, WANG Ren-hong. Geometric Hermite interpolation for space curves by B-spline[J]. Journal of Software, 2005, 16(04): 634~642.

[3] Gerald Farin. Class A Bézier Curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(7): 573~581.

[4] WEI Xiang-jiang, TIE Jun-cui, QIANG Cheng, *et al.* Design of arbitrarily shaped concentrators based on conformally optical transformation of nonuniform rational B-spline surfaces[J]. Applied Physics Letters, 2008, 92(26): 264101(3 pages).

[5] 阎坤. 天体运行轨道的背景介质理论导引与自相似分形测度计算的分维微积分基础[J]. 地球物理学进展, 2007, 22(2): 451~462.
YAN Kun. Introduction on background medium theory about celestial body motion orbit and foundation of fractional-dimension calculus about self-similar fractal measure calculation[J]. Progress in Geophys (in Chinese with abstract in English), 2007, 22(2): 451~462.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/celestialandmaths-pdf.pdf>

[6] 阎坤. 关于对无穷予以虚数形式标记的初步注释[R]. 西安: 西安现代非线性科学应用研究所, 2009-03-18.
YAN Kun. Primary annotation of symbol basing on imaginary form about infinity[R]. Xi'an: Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, 18 March 2009.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/spirit-pdf.pdf>

[7] A J Zambano, H Oguchi, I Takeuchi, *et al.* Dependence of exchange coupling interaction on micromagnetic constants in hard/soft magnetic bilayer systems[J]. Physical Review B, 2007, 75(14):144429(7 pages).

[8] Einstein A, Stern O. Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt (Some arguments in support of the assumption of molecular vibration at the absolute zero) [J]. Annalen der Physik, 1913, 40: 551~560.

[9] 于长丰. 相位力学原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
YU Chang-feng. Principles of Phase[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007.
<http://www.nndc.bnl.gov/chart/index.jsp>
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_elements_by_stability_of_isotopes

阎坤. 地球空间稳定核素的趋势分析方程与物质的超光速运动规律[J]. 地球物理学进展, 2006, 21(1):38~47.
YAN Kun. The tendency analytical equations of stable nuclides and the superluminal velocity motion laws of matter in geospace[J]. Progress in Geophysics (in Chinese with abstract in English), 2006, 21(1):38~47.
<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/vacuumenergy-pdf.pdf>

[11] XIE Rui-hua, GONG Jiang-bin. Simple three-parameter model potential for diatomic systems: from weakly and strongly bound molecules to metastable molecular ions[J]. Phys Rev Lett, 2005, 95(26): 263202(4 pages).

[12] 孙卫国, 樊群超, 任维义. 双原子分子离解能的精确研究[J]. 中国科学(G辑), 2007, 37(5): 590~599.
SUN Wei-guo, FAN Qun-chao, REN Wei-yi. Accurate studies on dissociation energies of diatomic molecules[J]. Science in China (Series G), 2007, 50(5): 611~621.

[13] Julien Toulouse, C J Umrigar. Full optimization of Jastrow-Slater wave functions with application to the first-row atoms and homonuclear diatomic molecules[J]. J Chem Phys, 2008, 128(17): 174101(14 pages).
<http://jpkc.nefu.edu.cn/csx/jpkc/doc/jiaoan/capter7.doc>

[14] 石德珂, 金志浩. 材料力学性能[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.

SHI De-ke, JIN Zhi-hao. Mechanical Behavior of Materials[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1998.

[16] 王来贵, 何峰, 刘向峰, 于永江. 岩石试件非线性蠕变模型及其稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(10): 1640~1642.
WANG Laigui, HE Feng, LIU Xiangfeng, YU Yongjiang. Nonlinear creep model and stability analysis of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(10): 1640-1642.

[17] 孙钧. 岩石流变力学及其工程应用研究的若干进展[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(6): 1081~1106.
SUN Jun. Rock rheological mechanics and its advance in engineering applications[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007,26(6):1081~1106.

[18] Gerya Taras V, Yuen David A. Robust characteristics method for modeling multiphase visco-elasto-plastic thermo-mechanical problems[J]. Physics of The Earth and Planetary Interiors, 2007, 163(4): 83~105.

研究报告[Research report]

关于连接方程的简略注释

阎坤

(西安现代非线性科学应用研究所 西安 710061)

摘要: 本文给出了连接方程的构造过程及其若干应用的简略注释, 讨论了连接方程是一非线性动力学方程的近似等效解析解的分析方法, 探讨了自然现象演化过程的规律谱系(或谱阵)及连接纽带大略一简学或维学研究方向, 提出了现象在演化过程的状态转变方程, 其在一般情况下遵循最优或最简洁路径光滑曲线方程形式这一自然最优原则或自然简洁原则, 给出了前偏对称(欠对称或弱对称)方程及后偏对称方程的简洁构造形式, 构建了数据曲线或部分连续函数的一种扩展型双曲正切级数近似表示形式, 继而提出了自然演化平衡法则, 给出了生物生长曲线趋势性方程; 依据连接方程的非线性动力学方程近似形式, 预言了二个基于非线性动力学方程的电路元件-电容器(nonlinstor)和电敏器(geomsentor), 其皆为深化型电容器的电路器件, 分析了RLCNG串联电路微分方程的性质; 给出了广义分布函数及广义分布密度函数的延展方向与粒子统计分布趋势性方程及其若干条件解, 讨论了Planck量子方程的频率区间性质, 探讨了具有近似线性变频解的非线性微分方程形式及在负频率情况下变频波动方程的曲线形态特征, 讨论了数据库理论构架(此构架由基础数据库、趋势性方程、解析数据库构成)的一种简洁模式, 建立了美国年度能源消费量与GDP关系方程及英国年度人口数量与GDP关系方程, 并计算预测了美国年度能源消费极限值与英国年度人口极限值; 随后探讨了岩石及单晶高温材料的蠕变过程曲线、半导体分立器件V-A特性曲线、超导材料电阻R(或电阻率 ρ)-绝对温度T曲线方程, 双晶Josephson结直流特性曲线及Shapiro台阶电流阶跃幅值曲线的趋势拟合方程, 机械系统或伺服系统摩擦力-速度特性曲线(包括Coulomb摩擦、Stribeck摩擦、黏性摩擦、摩擦迟滞及反常摩擦迟滞效应)的趋势拟合方程, Newton冷却定律的扩展方程形式, 高聚物熔体流动曲线剪切应力-剪切速率(包括第一Newton区、假塑性区、第二Newton区、胀流区、湍流及反常剪切效应)的趋势性方程等。在唯象及趋势层面, 指出了材料蠕变过程曲线与高聚物熔体流动曲线具有类似性质, 及材料断裂裂纹扩展结构与流体湍流漩涡嵌套结构这二种现象演化在分形测度表述上具有相通性的研究方向; 最后讨论了连接方程在数据拟合及长程预测方面的局限性。

关键词: 连接方程, 非线性动力学方程, 规律谱阵, 简学或维学, 状态转化方程, 自然简洁原则, 自然演化平衡法则

Brief annotation of the connection equation

YAN Kun

(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

Abstract In this paper, brief annotation of a constructing procedure and the applications of connection equation are given. An analytical method of the connection equation as an approximate equivalent analytical solution of nonlinear dynamics equations is discussed. Research direction of Jiansics or Dimennics about spectrum(spectrum array) formed by series of laws and their connections in evolution processes of natural phenomena are explored, an equation of the transformation of the phenomena between the states in evolutionary process is presented, that it follows a natural optimum principle or a natural conciseness principle in general, which having an equation form of the smooth curve with the optimal path or the most concise path, simple constructing forms of forward partial-symmetrical equation(or weak-symmetrical equation) and backward partial-symmetrical equation are given, an approximate expression of extended hyperbolic tangent series for data curve or partial continuous functions is constructed, then natural evolution-balance rule is presented, and tendency equation of biological growth process is given too. According to approximate form of the nonlinear dynamics equation of the connection equation, two new electronic circuit elements(nonlinstor and geomsentor) with deepening charge-controlled capacitor properties based on form of the nonlinear differential equation is predicted, and the nonlinear differential equation for a RLCNG series circuit is also analyzed, extended direction of the general distribution function and the general distribution density function, tendency equation and its conditional solutions of the statistical distributions of the particles are given, properties of the frequency interval of Planck's quantum equation are explored, nonlinear differential equation expressions with solution of approximate linear frequency conversion and their characteristics of curve shapes of frequency conversion wave equations at negative frequency are discussed, a concise model of database theoretical framework (this framework to be made up of foundation database, tendency equation, and analytic database) is explored, an equation of relationship between the total annual energy consumption with the annual GDP in the United States, and an equation of relationship between the annual population with the annual GDP in the United Kingdom are established, and limit values of the total annual energy consumption in the United States and the annual population in the United Kingdom are calculated and predicted. Subsequently, tendency fitting equations of curves are explored, which included the creep process curve of the rock and the single-crystal superalloy, the Volt-Ampere characteristic curve of the discrete semiconductor device, the resistance (or resistivity)-absolute temperature curve of the superconducting material, the direct current I-U characteristic curve of the bicrystal Josephson junction, and the current step amplitude of Shapiro steps, the friction-speed characteristic curve (that included the stages of Coulomb friction, Stribeck friction, viscous friction, friction hysteresis, and anomalous friction hysteresis effect) in mechanical system or servo system, an expanded equation form of the Newton's law of cooling, the shear stress-shear rate in the flow curve (that included the sections of first Newtonian fluid-flow, pseudoplastic flow, second Newtonian fluid-flow, dilatant flow, turbulent flow, and anomalous shearing effect) of the polymer melts, etc. On phenomenological and tendency levels, research directions of similar property of creep curves of materials with the flow curves of polymer melt, and similarity in the fractal measure of the evolutions of fracture cracks growth structure and fluid turbulent eddies nested structure are pointed out. At the end, limitations of the connection equation in data fitting and long-range forecasting are discussed.

Keywords connection equation, nonlinear dynamics equation, spectrum array of laws, Jiansics or Dimennics, states transforming equation, natural conciseness principle, natural evolution-balance rule

<http://www.nature.ac.cn/papers/paper-pdf/ConnectionEquation-pdf.pdf>